Estratégia
Militares

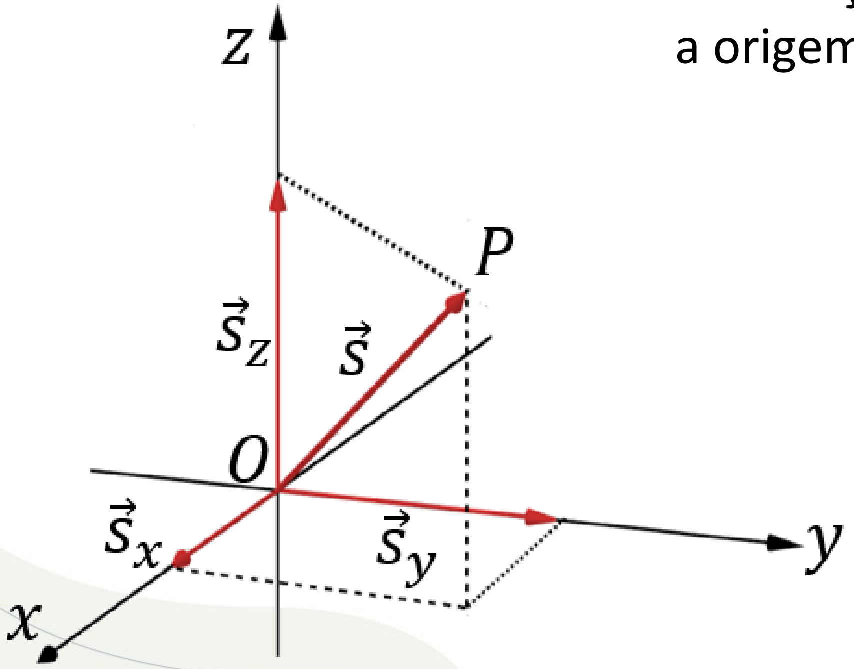
Estratégia
Militares

1. Cinemática vetorial

Prof. Toni Burgatto

1.1. Vetor deslocamento

1.1.1. Vetor posição



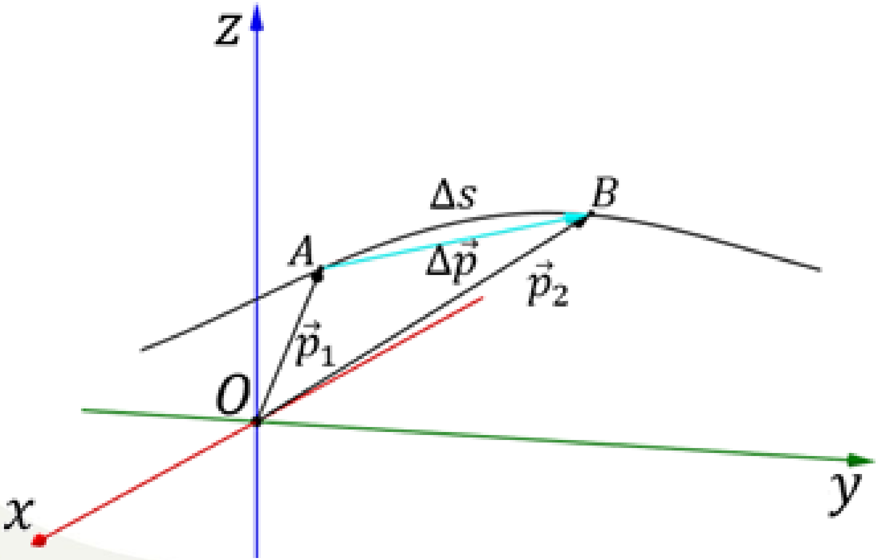
Define-se vetor posição ($\vec{s}$) de um ponto P em relação a um referencial O, o vetor que liga a origem em O à extremidade em P.

$$\vec{s} = s_x\,\hat{\imath} + s_y\,\hat{\jmath} + s_z\,\hat{k} = (s_x, s_y, s_z)$$

$$\vec{s} = \overrightarrow{s_x} + \overrightarrow{s_y} + \overrightarrow{s_z}$$

$$s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$$

1.1.2. Vetor deslocamento

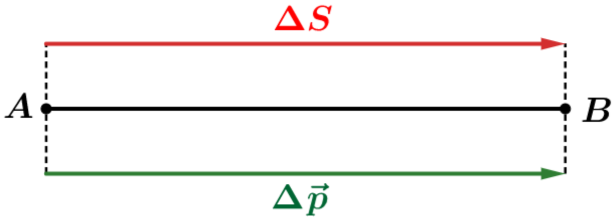


$$\Delta s = s_B - s_A$$

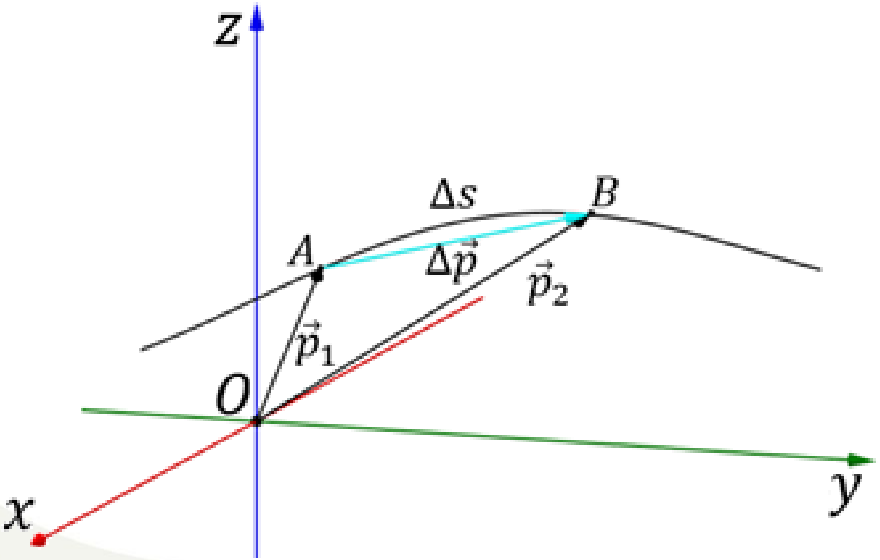
$$\Delta\vec{p} = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}$$

$$|\Delta\vec{p}| \leq |\Delta s|$$

$$|\Delta\vec{p}| = |\Delta s|$$



1.2 Velocidade vetorial média



$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

$$|\Delta\vec{p}| \leq |\Delta s|$$

$$\frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} \leq \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

$$|\vec{v}_m| \leq |v_m|$$

Exemplo 01:

Um corpo move-se com velocidade escalar constante descrevendo uma trajetória circular de raio 30 m, levando 18 segundos par completar uma volta. Em um intervalo de $\Delta t = 3{,}0\ s$, determine os módulos:

a) da variação do espaço do móvel;

b) do vetor deslocamento;

c) da velocidade escalar média; e

d) da velocidade vetorial média.

Comentários:

a)

Para o intervalo de tempo dado, se o móvel gasta 18 segundos para dar uma volta completa, em 3 ele percorre:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi \cdot \frac{3}{18} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

Exemplo 01:

Um corpo move-se com velocidade escalar constante descrevendo uma trajetória circular de raio 30 m, levando 18 segundos par completar uma volta. Em um intervalo de $\Delta t = 3{,}0\ s$, determine os módulos:

b) do vetor deslocamento.

Comentários:

b)

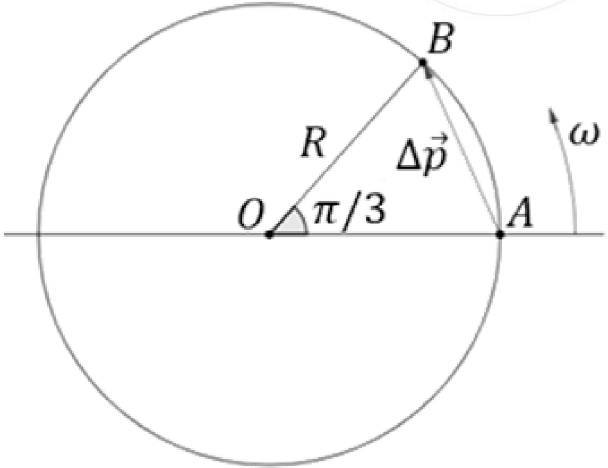
Dessa forma, podemos determinar a variação da posição do corpo pela relação geometria:

$$L = \alpha \cdot R$$

$$\Delta s = \varphi \cdot R$$

$$|\Delta s| = \frac{\pi}{3} \cdot 30 \Rightarrow \boxed{|\Delta s| = 10\pi\ m}$$

$$\boxed{|\Delta \vec{p}| = 30\ m}$$



Exemplo 01:

c) da velocidade escalar média; e

d) da velocidade vetorial média.

Comentários:

c)

O módulo da velocidade escalar é dado por:

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{|v_m| = \frac{10\pi}{3}\ m/s}$$

d)

Para a velocidade vetorial média, temos que:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta \vec{p}|}{\Delta t} = \frac{30}{3} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| = 10\ m/s}$$

Note que neste exercício, o módulo da velocidade vetorial média é menor que o módulo da velocidade escalar média:

$$3 < \pi \Rightarrow 30 < 10\pi \Rightarrow |\Delta \vec{p}| < |\Delta s|$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| < |v_m|}$$

1.3 A velocidade vetorial em movimentos importantes

Prof. Toni Burgatto

1.3. A velocidade vetorial em alguns movimentos

1.3.1. Movimento retilíneo uniforme (MRU)

Assim, podemos escrever que:

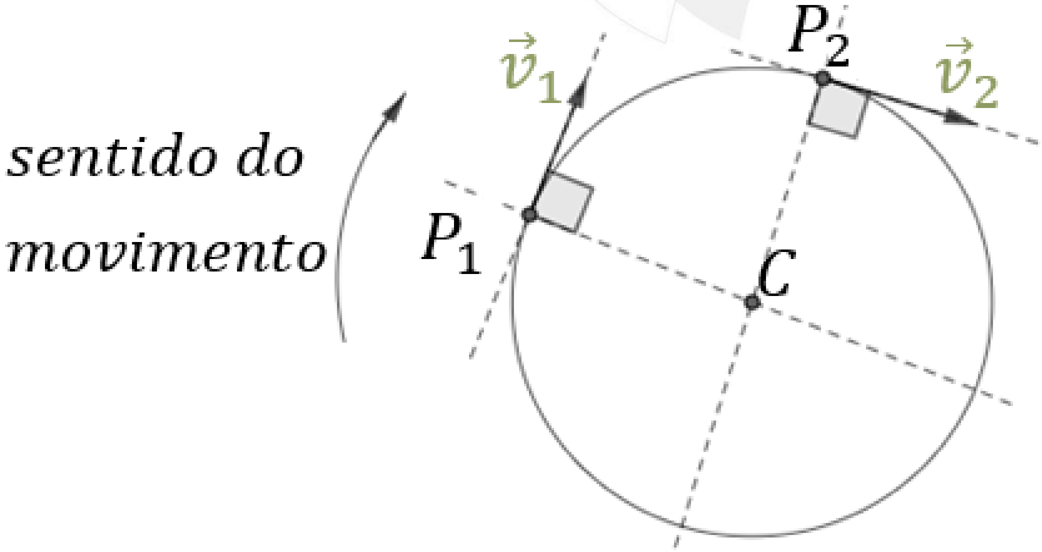
$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \vec{v}_2}$$

Então, dizemos que a velocidade vetorial é constante no MRU.

1.3. A velocidade vetorial em alguns movimentos

1.3.2. Movimento circular e uniforme (MCU)



$$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$$
$$mas\ \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$$

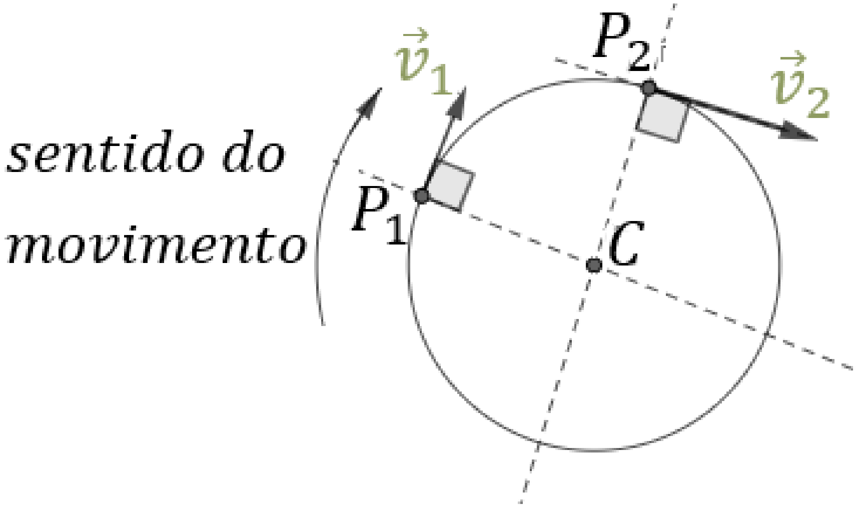
1.3. A velocidade vetorial em alguns movimentos

1.3.3. Movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV)

$$|\vec{v}_1| \neq |\vec{v}_2|$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$$

1.3.4. Movimento circular uniformemente variado

Neste tipo de movimento tanto o módulo quanto a direção da velocidade vetorial se alteram.

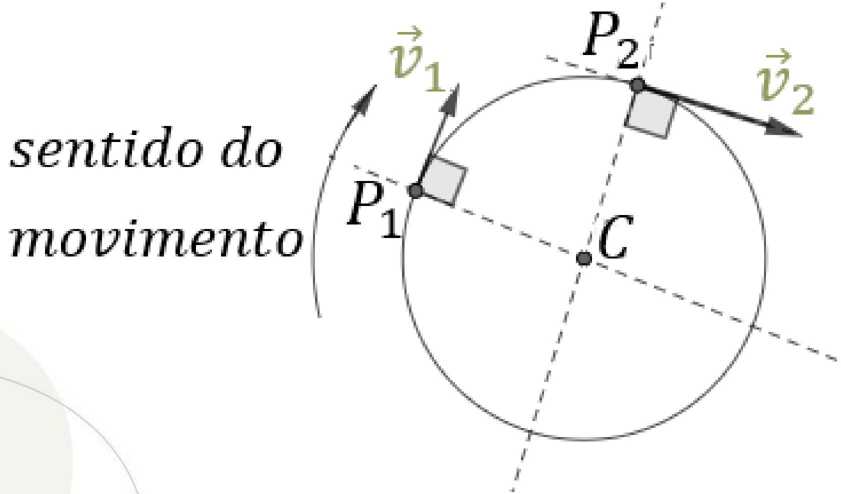


$$|\vec{v}_1| \neq |\vec{v}_2|$$
$$\Rightarrow \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2$$

1.4. Aceleração vetorial média

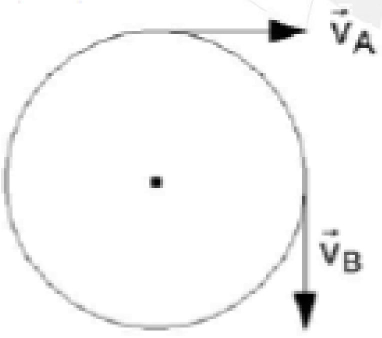
Se um partícula, realizando uma trajetória qualquer no espaço, ao passar por P_1 tem velocidade vetorial $\vec{v}_1$ e ao passar por P_2 tem velocidade vetorial $\vec{v}_2$, então, a aceleração vetorial média $\vec{a}_m$ entre estes dois instantes é definida por:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$



Exemplo 02:

(AFA – 2007) Uma partícula descreve movimento circular passando pelos pontos A e B om velocidades $\vec{v}_A$ e $\vec{v}_B$, conforme a figura. A opção que representa o vetor aceleração média entre A e B é:

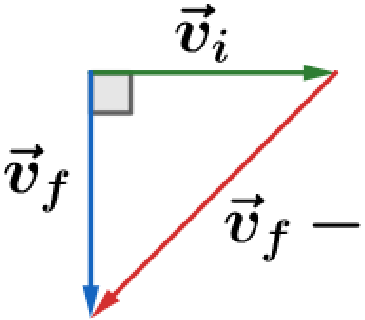


a) 

b) 

c) 

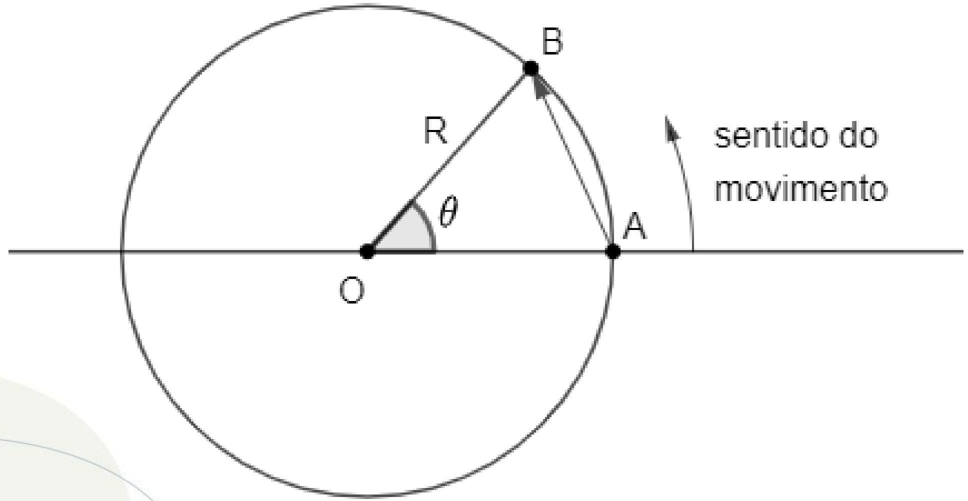
d) 



$$\vec{v}_f - \vec{v}_i = \Delta\vec{v}$$

Exemplo 03:

Uma partícula descreve um MCUV, tal que no primeiro instante sua velocidade é $\vec{v}_1$ e em um segundo instante sua velocidade é $\overrightarrow{v_2}$. Dado que $|\vec{v}_1| = 6{,}0\, m/s$ e $|\vec{v}_2| = 8\, m/s$, como na figura abaixo, determine o módulo da aceleração vetorial, se a partícula levou 4 segundos para ir de realizar este percurso. Adote: $cos\theta = 0{,}6$.

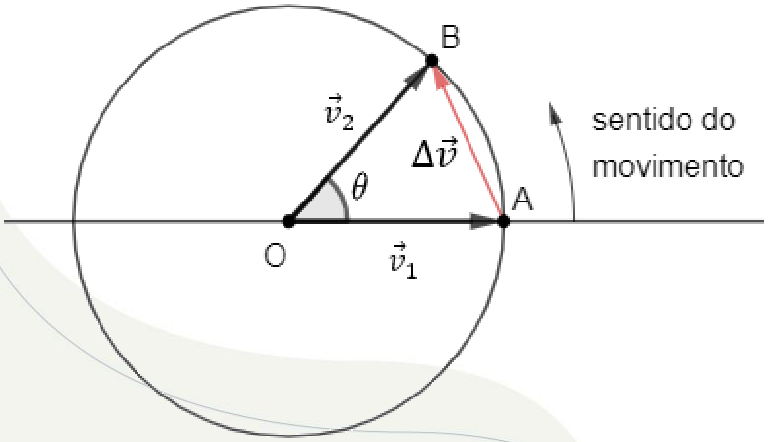


Exemplo 03:

A partir da definição, devemos encontrar quem é o módulo da variação da velocidade vetorial:

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$$

Geometricamente:



Pela lei dos cossenos, temos que:

$$|\Delta\vec{v}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2| - 2 \cdot |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot cos\,\theta$$

$$|\Delta\vec{v}|^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (0{,}6)$$

$$|\Delta\vec{v}| \cong 6{,}51\, m/s$$

Então, a aceleração vetorial média é dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}}$$

$$|\vec{a}_m| = \frac{6{,}51}{4} \cong 1{,}62\, m/s^2$$

1.5 A aceleração vetorial em movimentos importantes

Prof. Toni Burgatto

1.5. Aceleração vetorial instantânea

1.5.1. Trajetória retilínea

Para o caso da trajetória retilínea, o vetor $\vec{a}$ tem a mesma direção da trajetória e o módulo igual ao módulo da aceleração escalar. Se o movimento for acelerado ($a \cdot v > 0$), $\vec{a}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$.

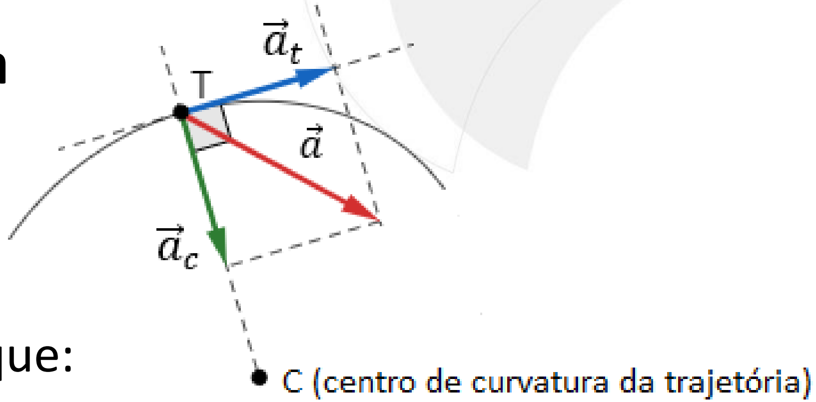
Por outro lado, se o movimento for retardado ($a \cdot v < 0$), $\vec{a}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$.

Movimento retilíneo e acelerado *Movimento retilíneo e retardado*

1.5. Aceleração vetorial instantânea

Estratégia Militares

1.5.2. Trajetória curva



Vetorialmente, temos que:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c}$$

A relação entre os módulos pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

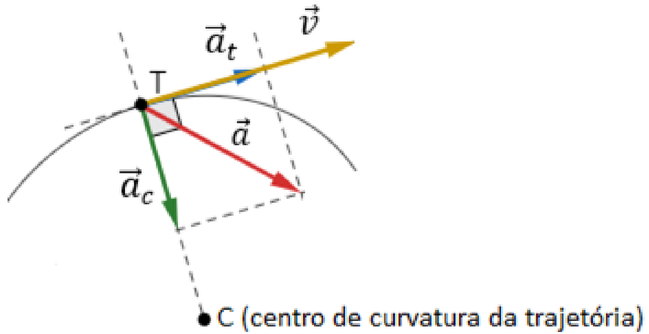
$$\boxed{|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_c|^2}$$

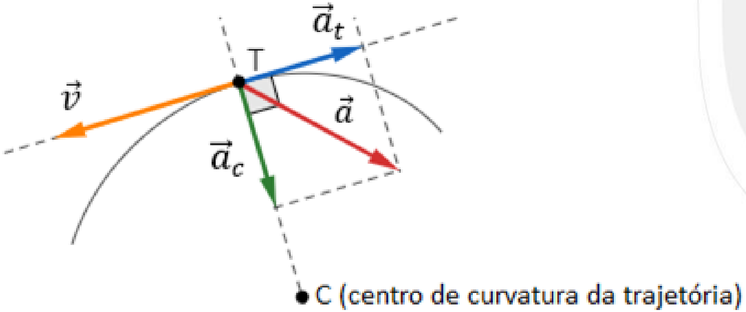
Pode-se demonstrar que a aceleração tangencial tem módulo igual ao módulo da aceleração escalar, isto é:

$$\boxed{|\vec{a}_t| = |a_e|}$$

1.5. Aceleração vetorial instantânea

Portanto, a aceleração tangencial está vinculada a variação do módulo da velocidade linear $\vec{v}$ mas não muda a sua direção. O sentido de $\vec{a}_t$ é o mesmo da velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$, se o movimento for acelerado, e contrário ao de $\vec{v}$, se o movimento for retardado.





É possível demonstrar que a aceleração centrípeta ($\vec{a}_c$) é dada por:

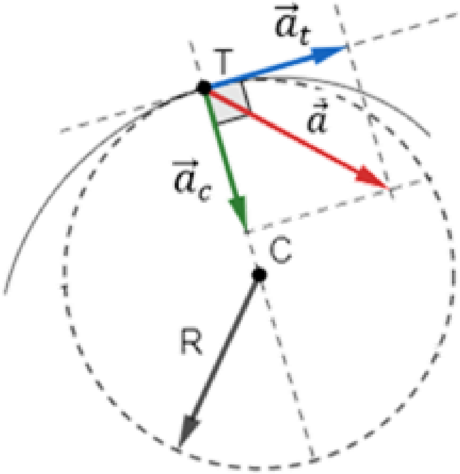
$$\boxed{|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}}$$

Em que v é o módulo da velocidade e R é o raio de curvatura da trajetória.

1.5. Aceleração vetorial instantânea

Se a trajetória é circular, o raio de curvatura é o próprio raio da circunferência. Para o caso de a trajetória não ser uma circunferência, é possível obter uma circunferência tangente à trajetória, chamada de **circunferência osculadora**, de tal forma que o raio é o raio de curvatura a ser usado no cálculo do módulo de $\vec{a}_c$, que aponta para o centro da circunferência osculadora.

Este é um método para calcular o raio de curvatura de uma trajetória, sem utilizar os recursos do Cálculo.



1.5. Aceleração vetorial instantânea

A aceleração centrípeta está ligada diretamente com a variação da direção da velocidade. Além disso, sua incidência nos nossos vestibulares é muito grande, portanto, vamos enfatizar alguns aspectos:

1º) Para o caso de o movimento ser retilíneo, sua circunferência osculadora teria raio infinito. Assim, $|\vec{a}_c| = 0$, ou seja, $\vec{a}_c = \vec{0}$. Assim, concluímos que a aceleração centrípeta é não-nula apenas em movimentos curvilíneos.

2º) Para o movimento uniforme, a aceleração tangencial é nula sempre ($\vec{a}_t = \vec{0}$).

3º) Se não for especificado qual a aceleração está sendo trabalhada, admite-se que se trata da aceleração vetorial instantânea.

1.5. Aceleração vetorial instantânea

1.5.3. Acelerações no MRU

Nesse movimento, temos as seguintes propriedades:

$$\vec{a}_t = \vec{0} \text{ e } \vec{a}_c = \vec{0}$$

Como $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$, portanto:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

1.5. Aceleração vetorial instantânea

1.5.4. Acelerações no MCU

Como visto anteriormente, a aceleração escalar nesse movimento é nula, então, a aceleração tangencial também é nula. Porém, a trajetória do movimento é uma curva, logo, sabemos que a aceleração centrípeta não é nula. Então:

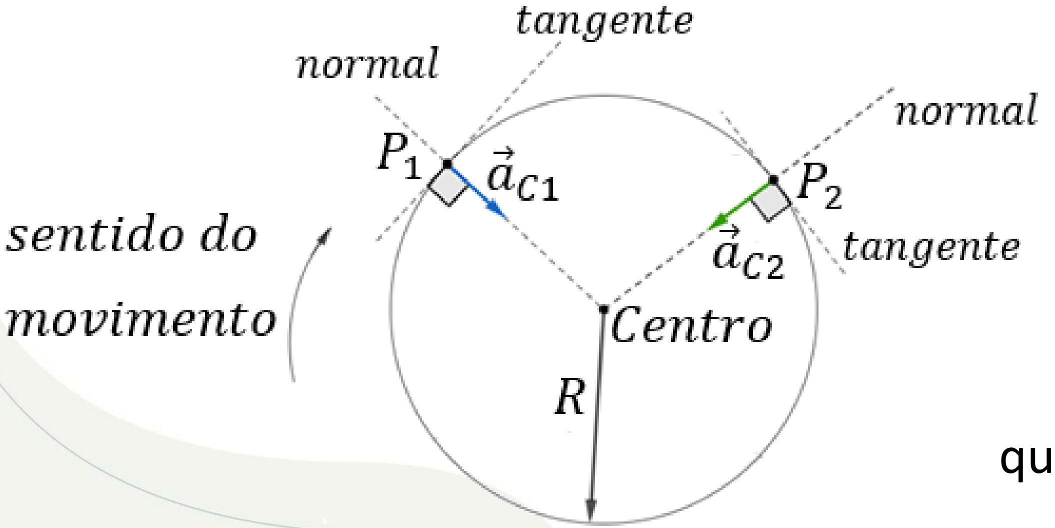
$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Mas, $\vec{a}_t = \vec{0}$, portanto:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_c}$$

1.5. Aceleração vetorial instantânea

Se estamos no MCU, sabemos que **a velocidade não varia em módulo**, então, ao calcularmos a aceleração centrípeta, $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$, percebemos que o seu **módulo** não varia. Contudo, a direção está variando a cada instante.



Portanto, dizemos que:

$$\boxed{|\vec{a}_{c1}| = |\vec{a}_{c2}| = |\vec{a}_c| = |\vec{a}| = \frac{v^2}{R}}$$

Entretanto, devemos nos atenta que:

$$\boxed{\vec{a}_{c1} \neq \vec{a}_{c2}}$$

1.5.5. Acelerações no MCUV

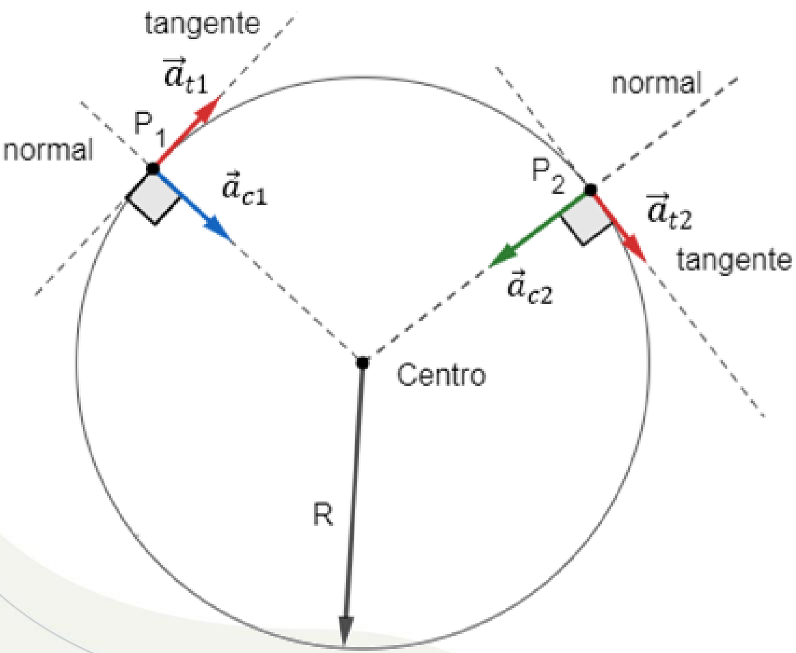
Por fim, temos o caso onde a aceleração escalar é não-nula e constante. Assim, sabemos que a aceleração tangencial também é constante e diferente de zero.

Como a trajetória é curvilínea, sabemos que existe também a aceleração centrípeta cujo módulo é dado por $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$.

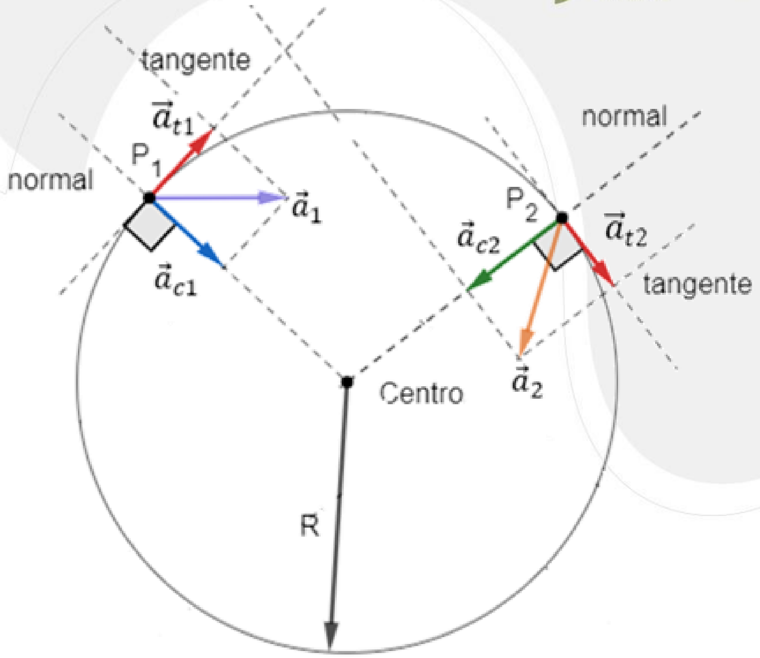
Portanto, podemos afirmar que a aceleração centrípeta irá variar, pois o módulo da velocidade é variável ($\vec{a}_t \neq \vec{0}$).

Estratégia Militares

1.5.5. Acelerações no MCUV



$$\boxed{|\vec{a}_{t1}| = |\vec{a}_{t2}|}$$



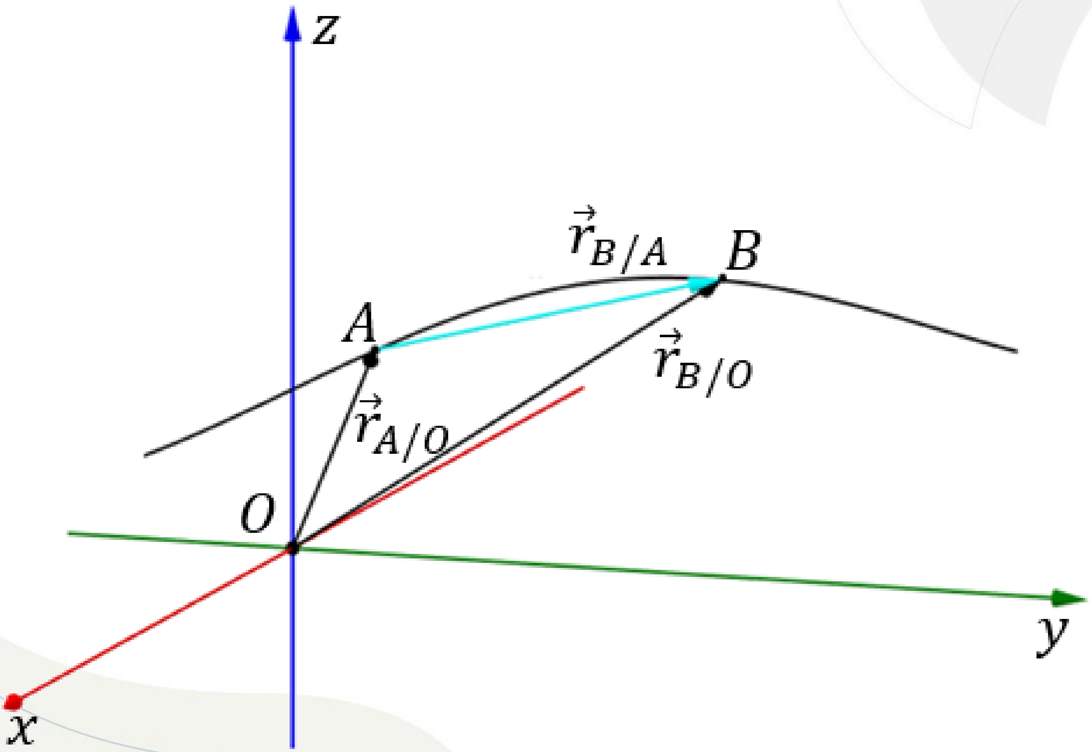
$\boxed{\vec{a}_{t1} \neq \vec{a}_{t2}}$ mas $\boxed{|\vec{a}_{t1}| = |\vec{a}_{t2}|}$

$\boxed{\vec{a}_{c1} \neq \vec{a}_{c2}}$ e $\boxed{|\vec{a}_{c_1}| \neq |\vec{a}_{c2}|}$

2. Composição de movimentos

Prof. Toni Burgatto

2. Composição de movimentos



$$\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}$$

Exemplo 04:

(EsPCEx – 2010) Um bote de assalto deve atravessar um rio de largura igual a $800\,m$, numa trajetória perpendicular à sua margem, num intervalo de tempo de 1 minuto e 40 segundos, com velocidade constante. Considerando o bote como uma partícula, desprezando a resistência do ar e sendo constante e igual a $6\,m/s$ a velocidade da correnteza do rio em relação à sua margem, o módulo da velocidade do bote em relação à água do rio deverá ser de:

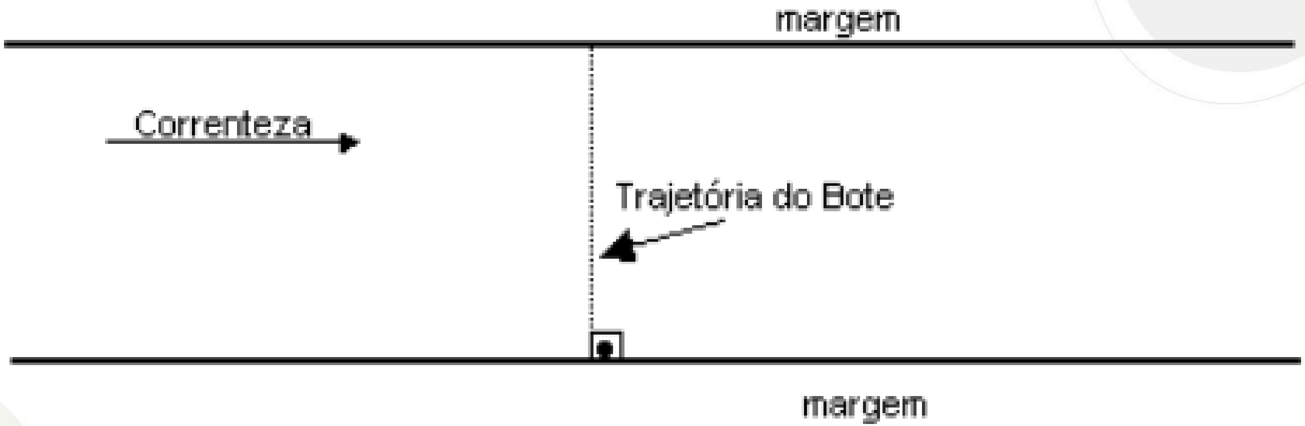
a) 4 m/s

b) 6 m/s

c) 8 m/s

d) 10 m/s

e) 14 m/s



Desenho Ilustrativo

Exemplo 04:

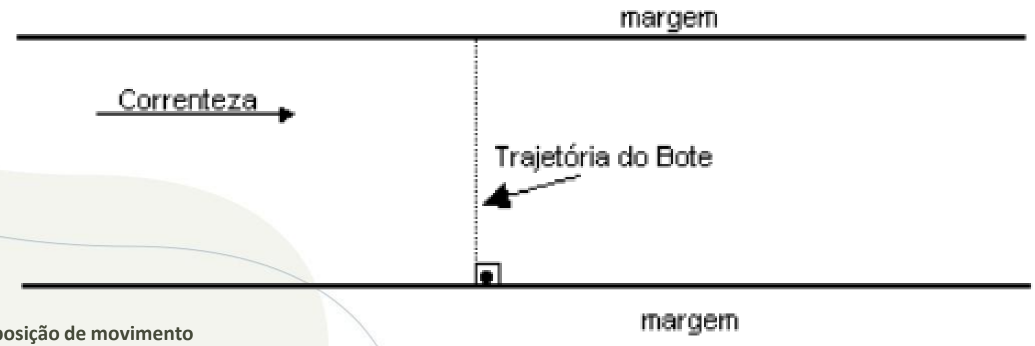
Comentários:

Inicialmente, escrevemos todos os vetores velocidades:

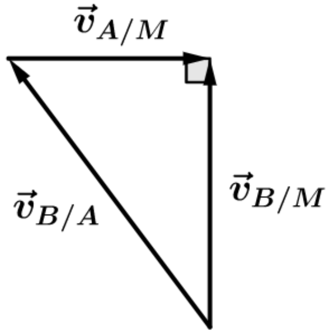
$$\begin{cases} \vec{v}_{B/M}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ às\ margens \\ \vec{v}_{B/A}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ à\ água \\ \vec{v}_{A/M}: velocidade\ da\ água\ em\ relacao\ às\ margens \end{cases}$$

Pela regra das bolinhas, temos que:

$$\boxed{\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{A/M}}$$



Desenho Ilustrativo



Exemplo 04:

A velocidade do barco em relação às margens é dado por:

$$\left|\vec{v}_{B/M}\right| = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

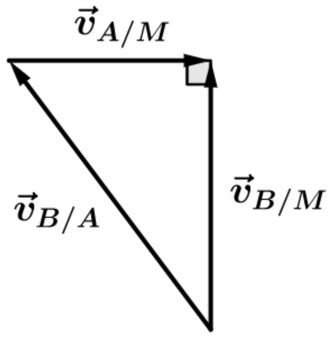
$$\left|\vec{v}_{B/M}\right| = \frac{800}{100} = 8\,m/s$$

Logo, pela soma vetorial, o módulo da velocidade do barco em relação às águas é dado por:

$$\left|\vec{v}_{B/A}\right|^2 = \left|\vec{v}_{B/M}\right|^2 + \left|\vec{v}_{A/M}\right|^2$$

$$\left|\vec{v}_{B/A}\right|^2 = 8^2 + 6^2$$

$$\boxed{\left|\vec{v}_{B/A}\right| = 10\,m/s}$$



Exemplo 05:

(EsPCEx – 2001) Num dia sem vento, sob a chuva que cai verticalmente, com velocidade constante em relação ao solo, uma pessoa caminha horizontalmente em movimento retilíneo e uniforme com velocidade de 1,0 m/s, inclinando o guarda-chuva a 28,5° (em relação à vertical) para resguardar-se o melhor possível. A intensidade da velocidade da chuva a em relação ao solo é:

Dados:

- $cos\ 28{,}5° = 0{,}88$

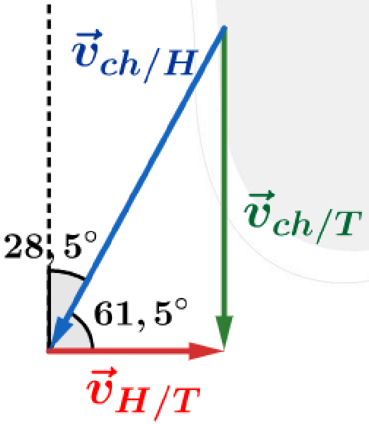
- $sen\ 28{,}5° = 0{,}48$

- $tg\ 61{,}5° = 1{,}84$

a) 1,8 m/s b) 0,9 m/s c) 0,5 m/s d) 1,5 m/s e) 1,3 m/s

Exemplo 05:

Diante do problema em questão, temos a seguinte disposição dos vetores:



Portanto:

$$tg(61{,}5°) = \frac{\left|\vec{v}_{ch/T}\right|}{\left|\vec{v}_{H/T}\right|}$$

$$1{,}84 = \frac{\left|\vec{v}_{ch/T}\right|}{1{,}0}$$

$$\boxed{\left|\vec{v}_{ch/T}\right| = 1{,}8\ m/s}$$

Exemplo 06:

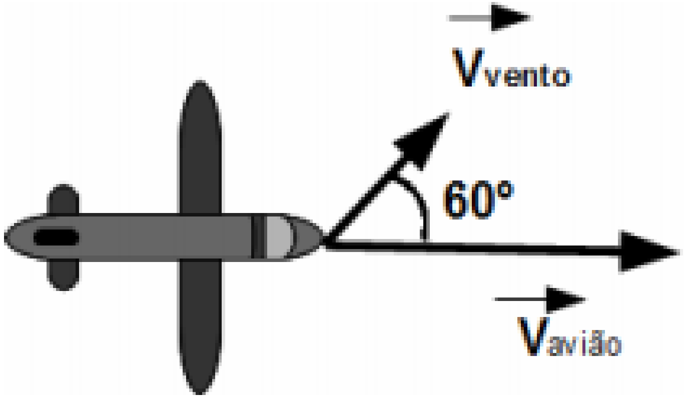
(EEAR – 2016) Um avião de brinquedo voa com uma velocidade de módulo igual a 16 km/h numa região com ventos de velocidade de módulo 5 km/h. As direções da velocidade do avião e da velocidade do vento formam entre si um ângulo de 60°. Conforme figura abaixo. Determine o módulo da velocidade resultante, em km/h, do avião nesta região.

a) 19

b) 81

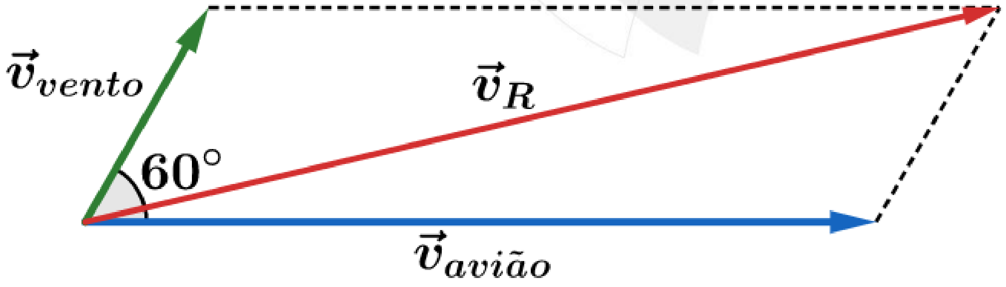
c) 144

d) $\sqrt{201}$



Exemplo 06:

Fazendo a soma vetorial das velocidades, temos:



Aplicando a lei dos cossenos da física, temos:

$$|\vec{v}_R|^2 = |\vec{v}_{vento}|^2 + |\vec{v}_{avião}| + 2 \cdot |\vec{v}_{vento}| \cdot |\vec{v}_{avião}| \cdot \cos 60°$$

$$|\vec{v}_R|^2 = 5^2 + 16^2 + 2 \cdot 5 \cdot 16 \cdot \frac{1}{2}$$

$$|\vec{v}_R|^2 = 361$$

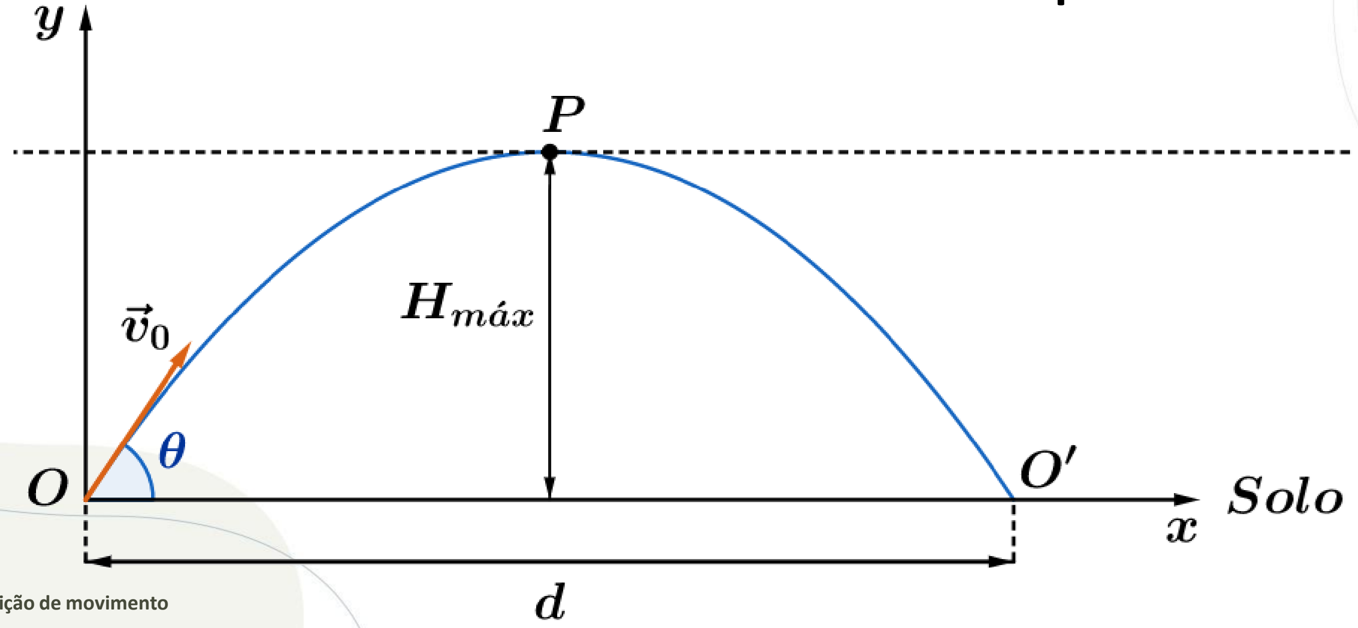
$$\boxed{|\vec{v}_R| = 19\ m/s}$$

3. Lançamento oblíquo

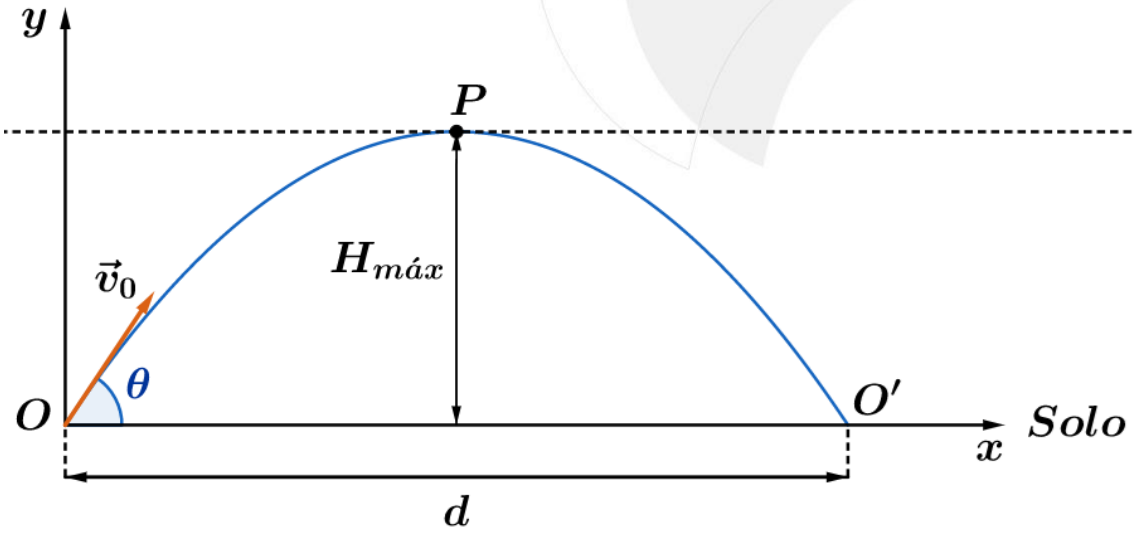
Prof. Toni Burgatto

3. Lançamento oblíquo

Quando um corpo apresenta um movimento composto, isto é, seu movimento pode ser dividido numa soma de movimentos independentes, cada um dos movimentos componentes se realizam como se os demais não existissem e os movimentos acontecem no mesmo intervalo de tempo.



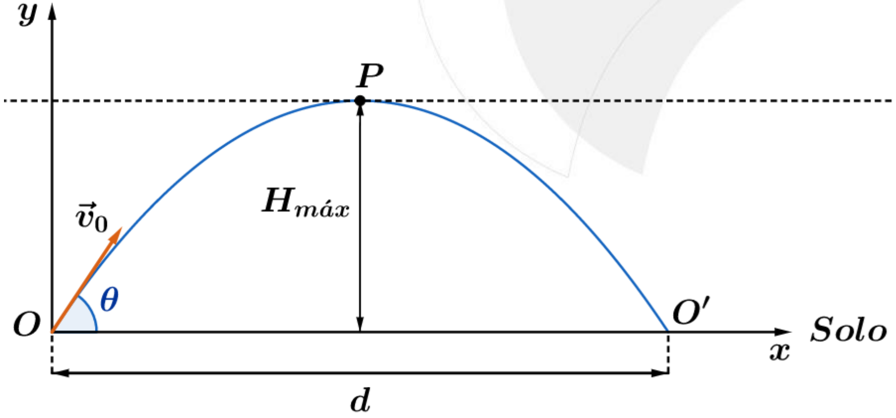
3. Lançamento oblíquo

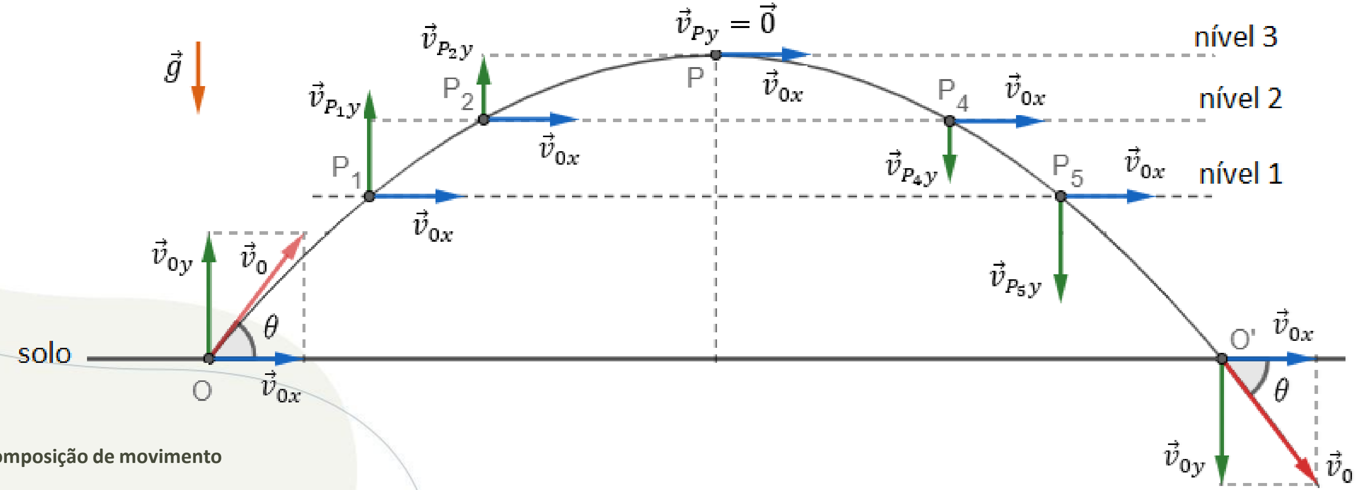


Nesta situação, temos os seguintes elementos que compõem o lançamento:

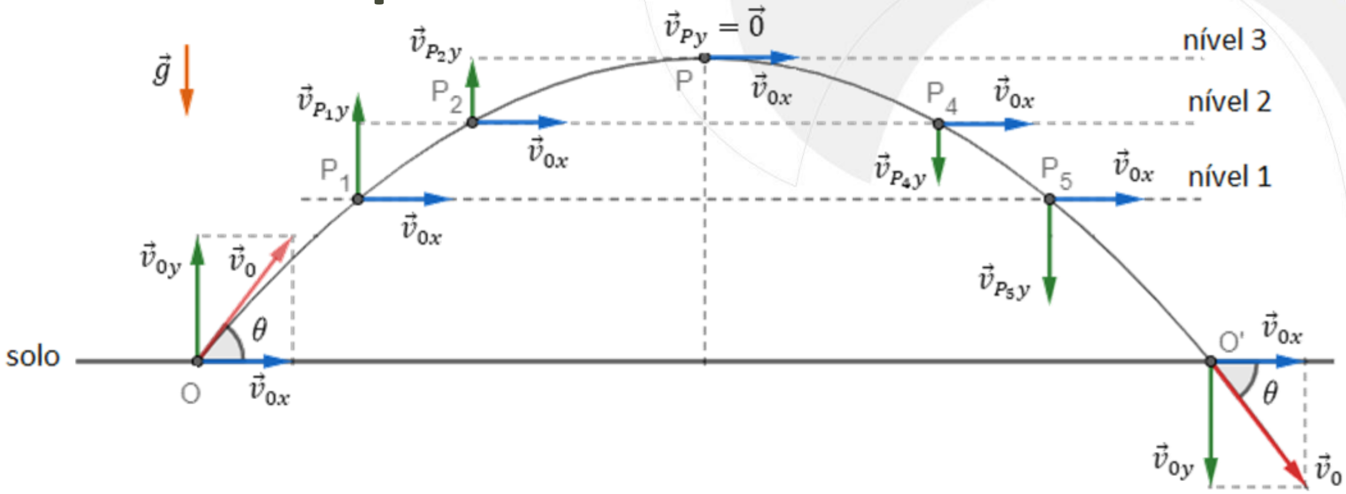
1) Ângulo de lançamento (θ): ângulo formado pelo vetor $\vec{v}_0$ com a direção horizontal;
2) Vértice da trajetória (P): ponto mais alto da trajetória; e
3) Alcance máximo (d): distância entre o ponto de lançamento (O) e o ponto onde o corpo atinge o solo novamente (O').

3. Lançamento oblíquo





3. Lançamento oblíquo



Na decomposição vertical, o móvel apenas sobe e desce. Assim, podemos certificar que as velocidades para um dado nível, possuem o mesmo módulo, mas direção oposta, como indicado na figura anterior. Portanto:

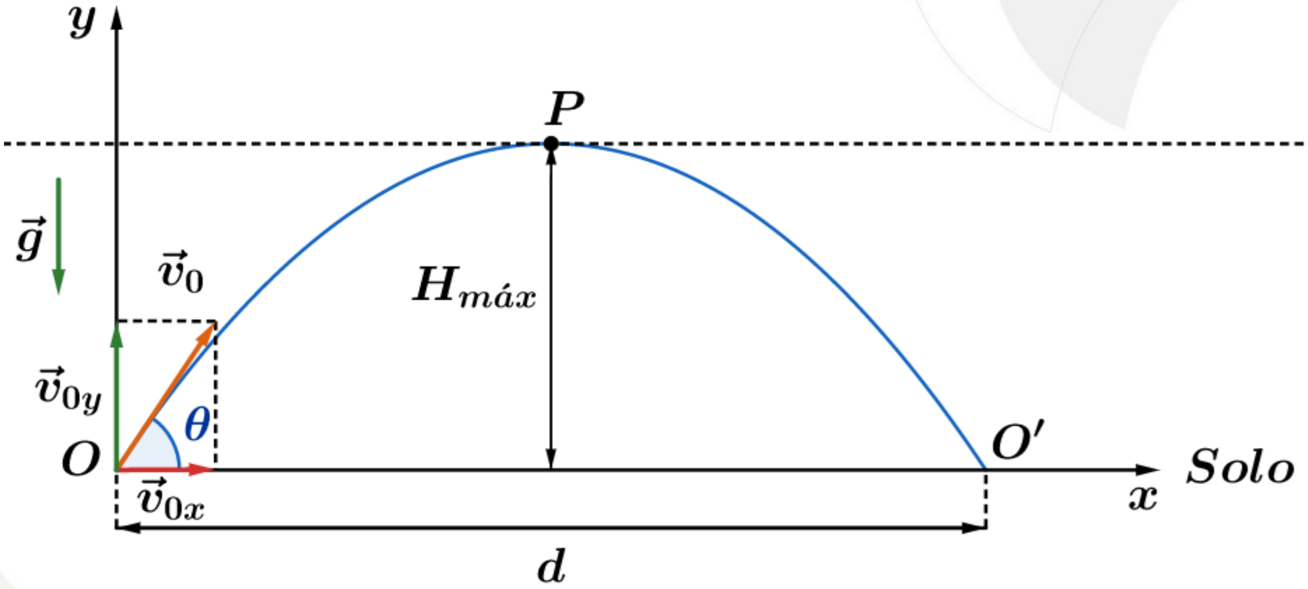
$$|\vec{v}_{P_1y}| = |\vec{v}_{P_5y}|$$

$$|\vec{v}_{P_2y}| = |\vec{v}_{P_4y}|$$

$$|\vec{v}_{Oy}| = |\vec{v}_{O'y}|$$

$$\vec{v}_{Py} = \vec{0}$$

3.1. Equações do lançamento oblíquo



a) Direção horizontal:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

$$x = v_{0x} \cdot t$$

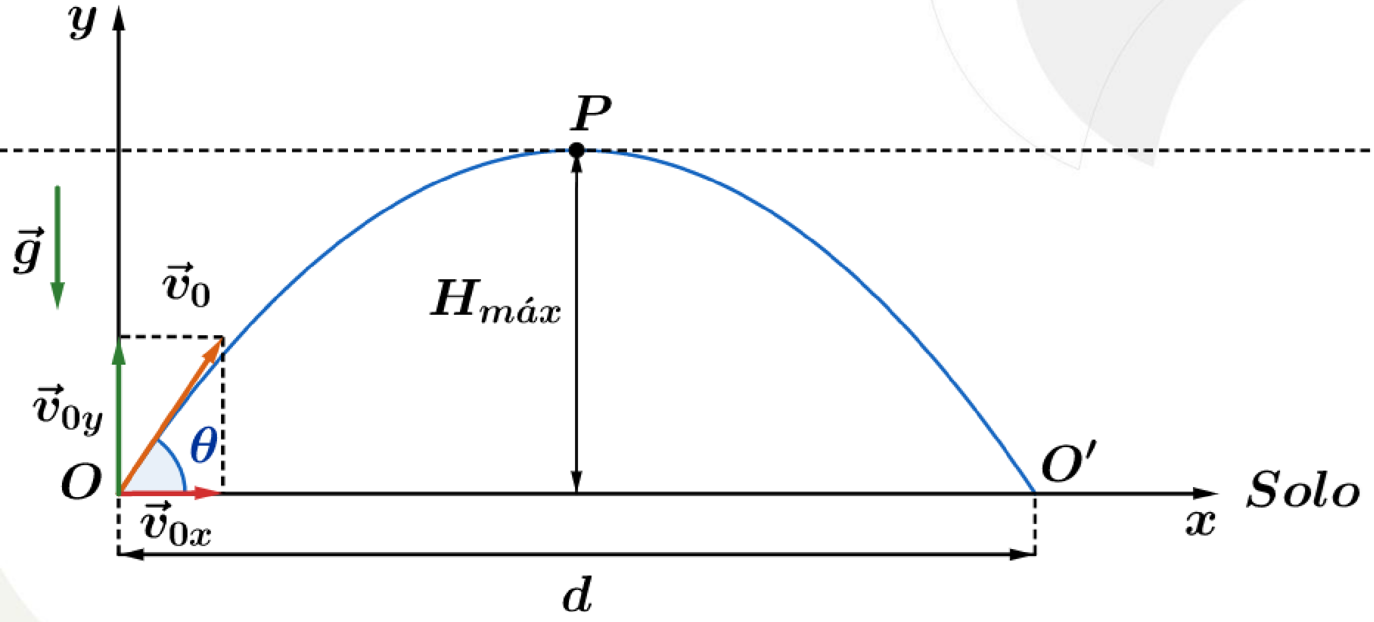
$$x = 0 + v_{0x} \cdot t$$

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta$$

$$\boxed{\vec{v}_{0x} = v_0 \cdot \cos\theta \ \hat{\imath}}$$

$$\boxed{x = (v_0 \cos\theta) \cdot t}$$

3.1. Equações do lançamento oblíquo



a) Direção vertical:

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen(\theta)$$

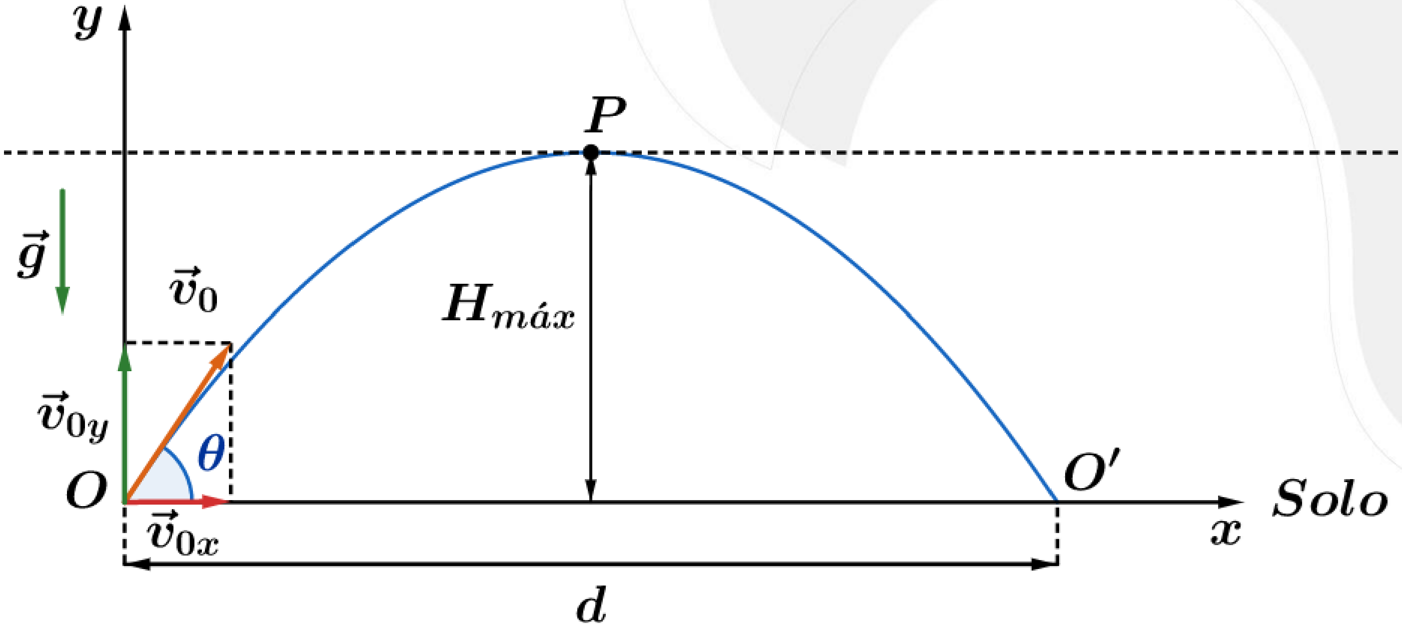
$$\boxed{\vec{v}_{0y} = v_0 sen(\theta)\,\hat{j}}$$

$$\boxed{v_y = v_0 \cdot sen(\theta) - g \cdot t}$$

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \qquad y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2}$$

$$y = 0 + \left(v_0 \cdot sen(\theta)\right) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

3.1. Equações do lançamento oblíquo



$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \qquad v_{Py} = v_{0y} - g \cdot t_{subida} \qquad v_{Py} = 0$$

$$0 = v_0 \cdot sen(\theta) - g \cdot t_{subida} \quad \therefore \quad \boxed{t_{subida} = \frac{v_0 \cdot sen(\theta)}{g}}$$

3.1. Equações do lançamento oblíquo

Portanto, o **tempo de voo** é dado por:

$$t_{voo} = 2 \cdot t_{subida}$$

$$\boxed{t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen(\theta)}{g}}$$

O **alcance** do corpo pode ser encontrado pela função horária do espaço na direção x:

$$x(t) = (v_0 \cdot \cos\theta) \cdot t$$

$$d = (v_0 \cdot \cos\theta) \cdot t_{voo}$$

$$d = (v_0 \cdot \cos\theta) \cdot \left(\frac{2v_0 \cdot sen(\theta)}{g}\right)$$

$$d = \frac{v_0^2 \cdot (2 \cdot sen(\theta) \cdot \cos\theta)}{g}$$

3.1. Equações do lançamento oblíquo

Da trigonometria, temos a relação de seno do arco duplo dado por:

$$sen(2\theta) = 2 \cdot sen(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Finalmente, chegamos a equação do alcance:

$$\boxed{d = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\theta)}{g}}$$

3.1. Equações do lançamento oblíquo

Por último, podemos calcular a altura máxima que o corpo atingiu na vertical, quando lançado com um ângulo θ. Para isso, temos duas opções para chegar ao resultado: calculando a posição vertical no tempo de subida ou utilizando Torricelli na direção vertical entre os pontos O e P.

Vamos utilizar Torricelli, então:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y$$

$$0 = (v_0 sen\theta)^2 - 2 \cdot g \cdot H$$

$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\theta}{2g}}$$

3. Exemplos importantes

Prof. Toni Burgatto

Exemplo 07:

(EsPCEx – 2011) Uma esfera é lançada com velocidade horizontal constante de módulo $v = 5\ m/s$ da borda de uma mesa horizontal. Ela atinge o solo num ponto situado a 5 m do pé da mesa conforme o desenho abaixo.

Desprezando a resistência do ar, o módulo da velocidade com que a esfera atinge o solo é de:

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\ m/s^2$.

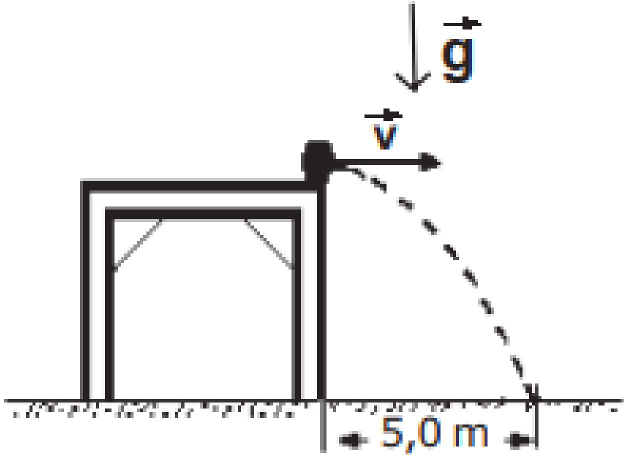
a) 4 m/s

b) 5 m/s

c) $5\sqrt{2}\ m/s$

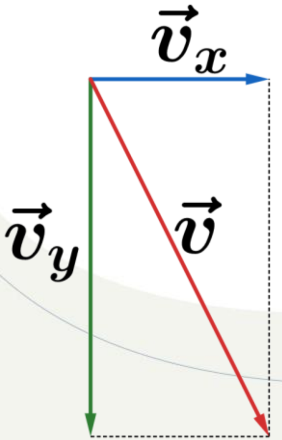
d) $6\sqrt{2}\ m/s$

e) $5\sqrt{5}\ m/s$



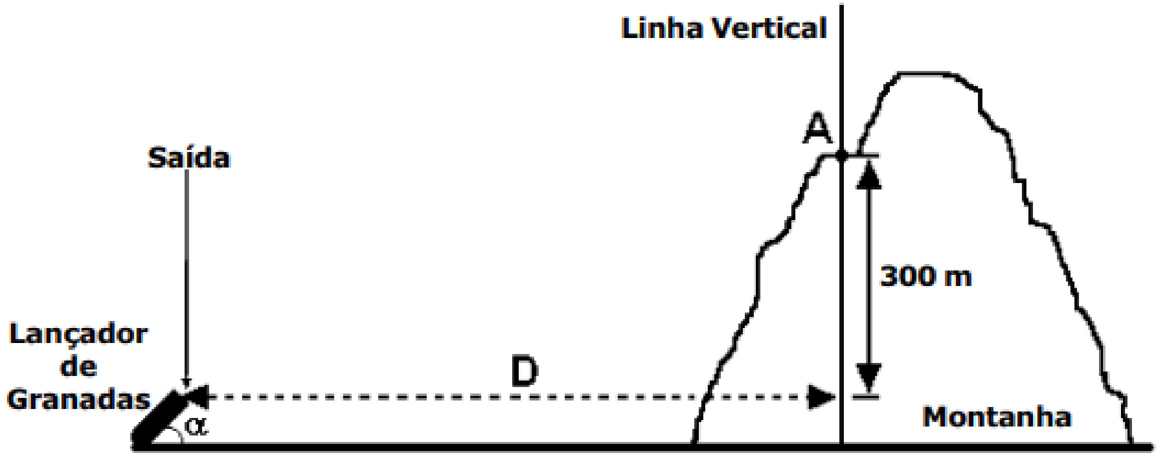
desenho ilustrativo - fora de escala

Exemplo 07:

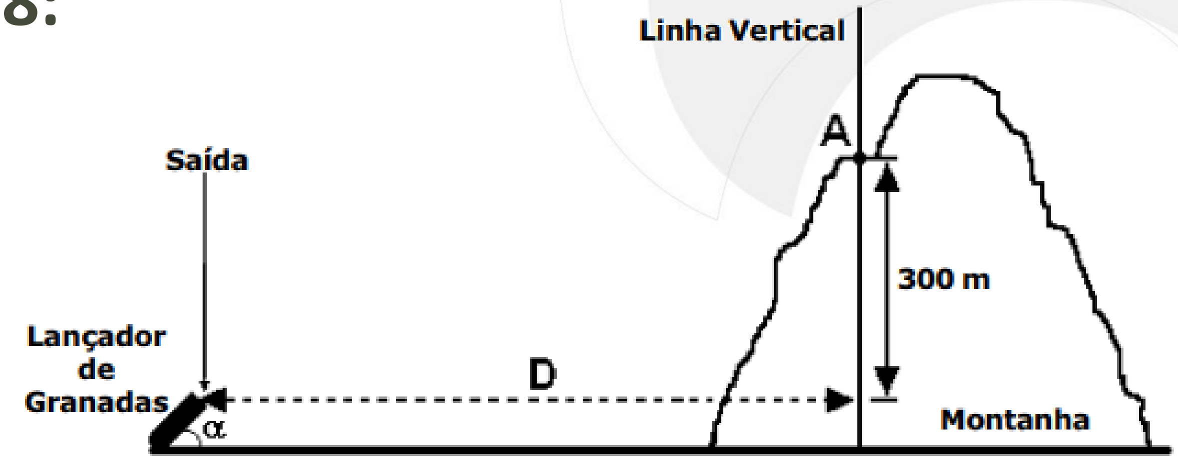


Exemplo 08:

Um lançador de granadas deve ser posicionado a uma distância D da linha vertical que passa por um ponto A. Este ponto está localizado em uma montanha a 300 m de altura em relação à extremidade de saída da granada, conforme o desenho abaixo.



Exemplo 08:

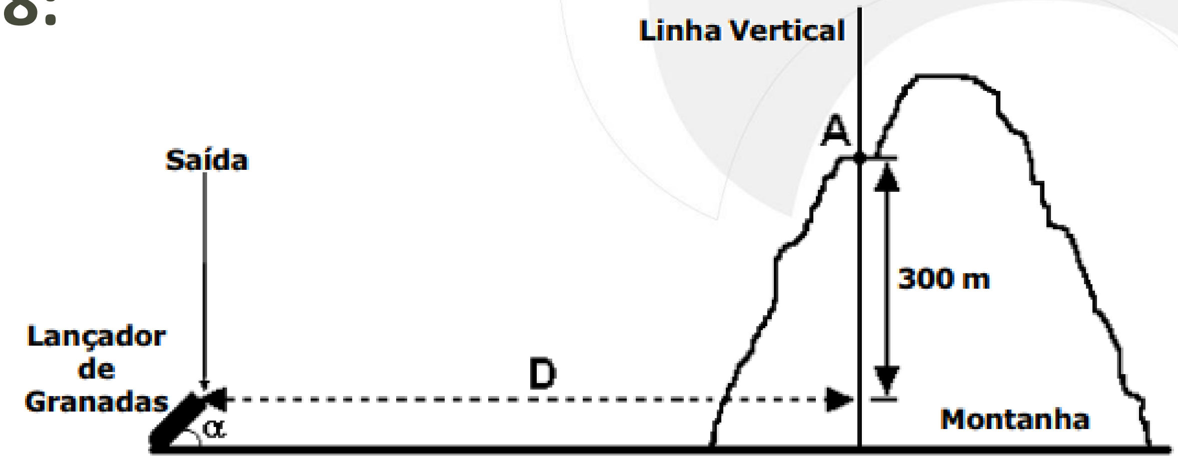


A velocidade da granada, ao sair do lançador, é de $100\, m/s$ e forma um ângulo "α" com a horizontal; a aceleração da gravidade é igual a $10\, m/s^2$ e todos os atritos são desprezíveis. Para que a granada atinja o ponto A, somente após a sua passagem pelo ponto de maior altura possível de ser atingido por ela, a distância D deve ser de:

Dados: $\cos \alpha = 0{,}6$ e $sen\ \alpha = 0{,}8$

a) 240 m b) 360 m c) 480 m d) 600 m e) 960 m

Exemplo 08:



Linha Vertical
A
Saída
300 m
Lançador
de
Granadas
D
α
Montanha

Exemplo 08:

Exemplo 09:

(EFOMM – 2013) Uma bola é lançada obliquamente e, quando atinge a altura de $10\ m$ do solo, seu vetor velocidade faz um ângulo de 60° com a horizontal e possui uma componente vertical de módulo $5{,}0\ m/s$. Desprezando a resistência do ar, a altura máxima alcançada pela bola, em metros, é de

Dado: $g = 10\ m/s^2$.

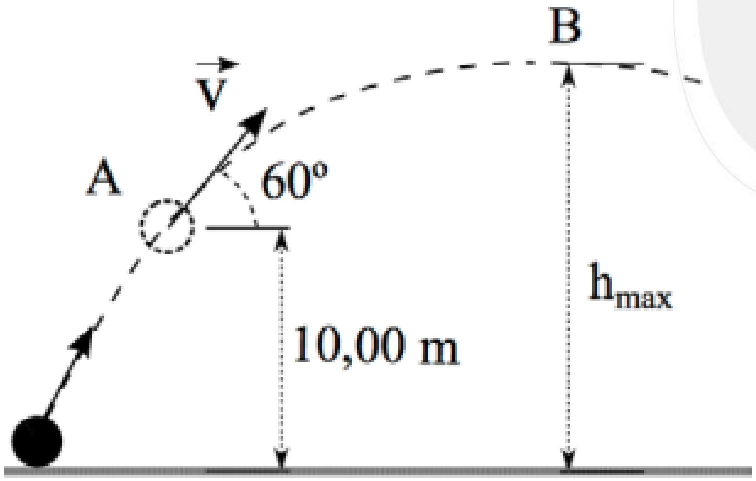
a) 45/4

b) 50/4

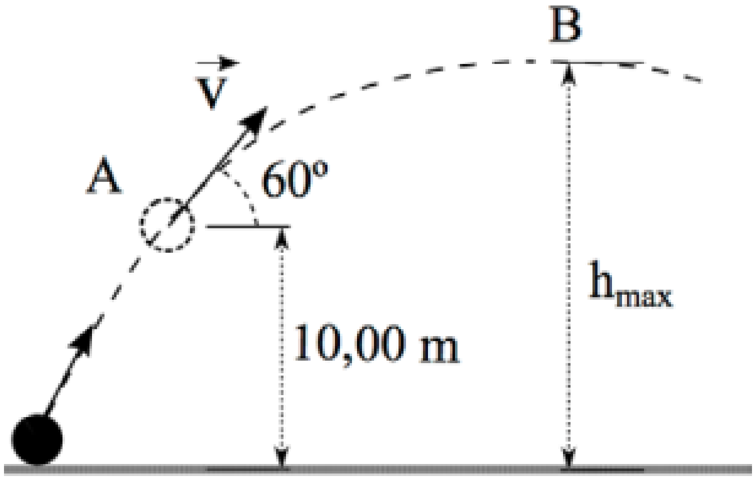
c) 55/4

d) 60/4

e) 65/4



Exemplo 09:



3. Alcance máximo e equação da curva

Prof. Toni Burgatto

3.2. Alcance máximo

Como visto anteriormente, o alcance é calculado por:

$$d = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\theta)}{g}$$

Se **fixarmos a velocidade** de lançamento do objeto e **variar apenas o ângulo**, vemos que o alcance depende apenas do ângulo de inclinação com a horizontal. Então, para que o alcance seja máximo, $sen2\theta$ deve ser máximo. Nas definições de seno, conhecemos que seno de um ângulo é um valor entre -1 e 1. Então, $sen2\theta$ assumi seu valor máximo quando é igual a 1.

Se $sen2\theta = 1$, o alcance máximo é dado por:

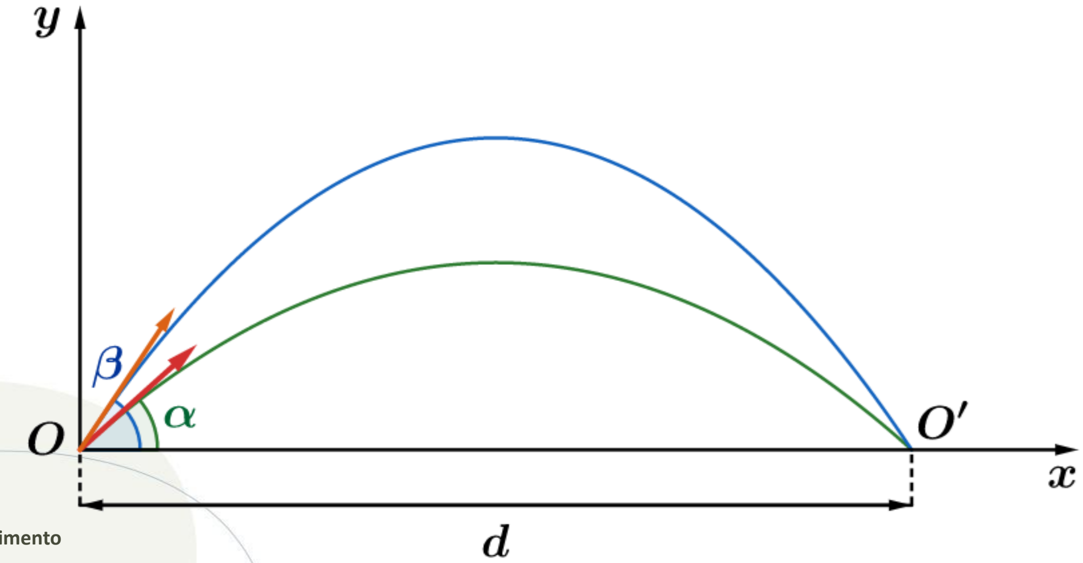
$$\boxed{d_{máx} = \frac{v_0^2}{g}}$$

Como $sen2\theta = 1$, então $2\theta = 90°$. Portanto, $\boxed{\theta = 45°}$.

3.2. Alcance máximo

Propriedade do alcance:

Se duas partículas são lançadas de um mesmo ponto, com velocidades de mesmo módulo e a soma dos ângulos de lançamento serem 90°, então as duas partículas terão o mesmo alcance.



3.2. Alcance máximo

Demonstração: dadas duas partículas A e B com velocidades cujos módulos são iguais a v_0 ($|\vec{v}_A| = |\vec{v}_B| = v_0$). Se A é lançada com um ângulo α e B é lançada com um ângulo β, tal que $\alpha + b = 90°$. Então, podemos escrever o alcance para cada uma das partículas.

$$d_A = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\alpha)}{g} \ e \ d_B = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\beta)}{g}$$

Pela trigonometria, sabemos que:

$$\alpha + \beta = 90$$
$$2\alpha + 2\beta = 180$$
$$2\alpha = 180 - 2\beta$$

Logo:

$$sen(2\alpha) = sen(180 - 2\beta)$$

Mas, sabemos que: $sen(180 - \theta) = sen\theta$, portanto:

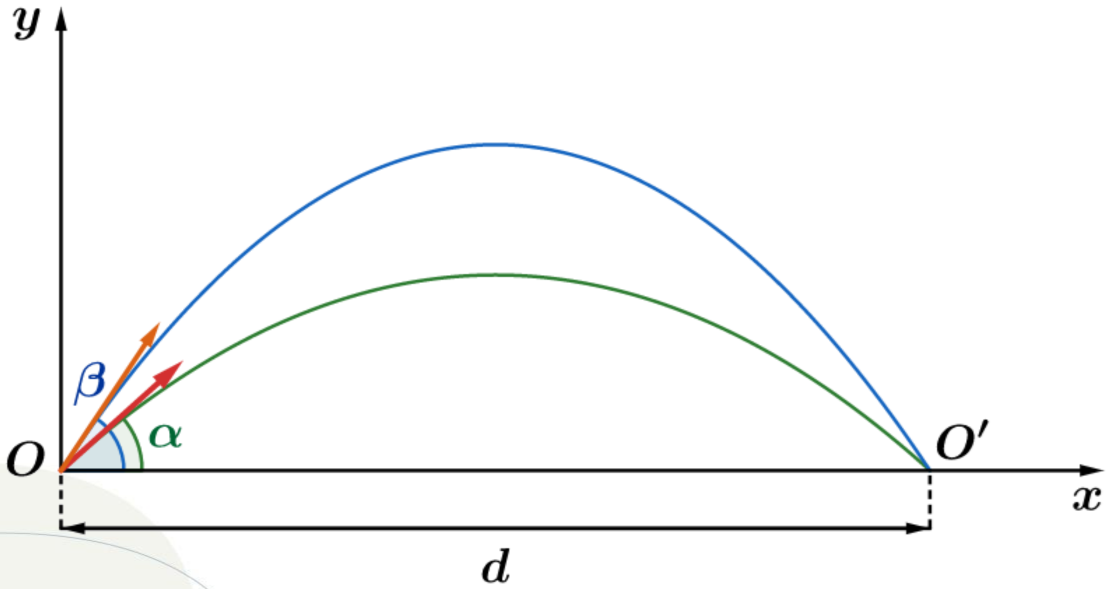
$$\boxed{sen(2\alpha) = sen(2\beta)}$$

$$\frac{v^2}{g} \cdot sen(2\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \cdot sen(2\beta)$$

$$\boxed{d_A = d_B}$$

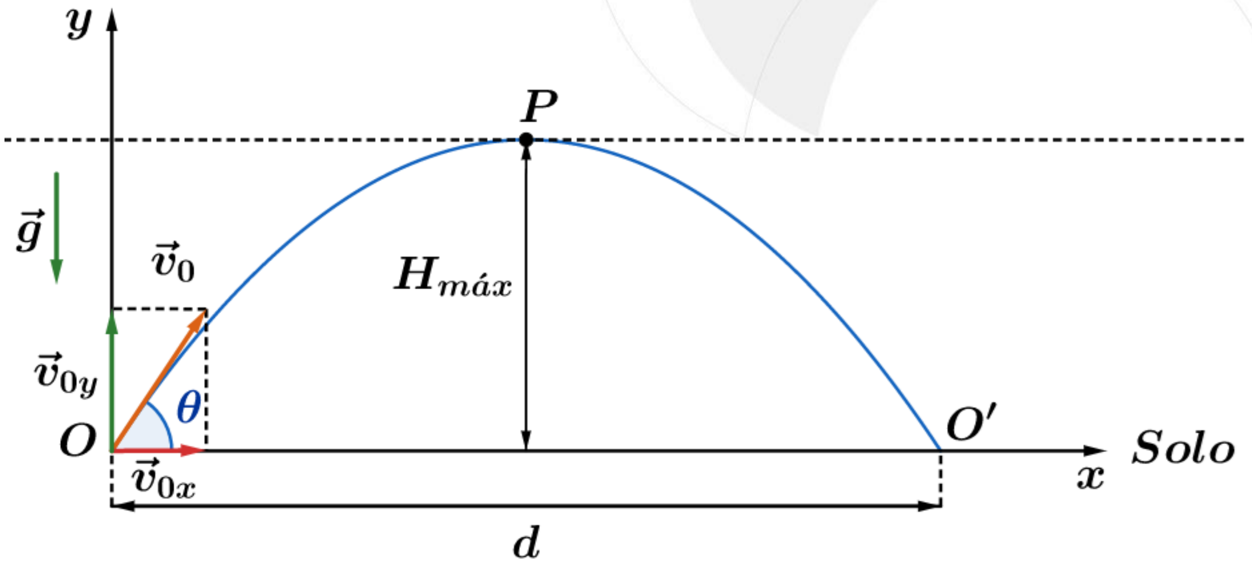
3.2. Alcance máximo

A volta da propriedade também é válida, isto é, se dois corpos partem de um mesmo ponto e possuem o mesmo alcance, então a soma dos ângulos de lançamento é igual 90° (em outras palavras, dizemos que os ângulos de lançamentos são complementares).



3.3. Equação da curva do lançamento oblíquo

Estratégia Militares



$$x = v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot t \text{ (1)}$$

$$y = v_0 \cdot sen(\theta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \text{ (2)}$$

3.3. Equação da curva do lançamento oblíquo

Isolando o tempo em (1) e substituindo em (2), temos que:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta}$$

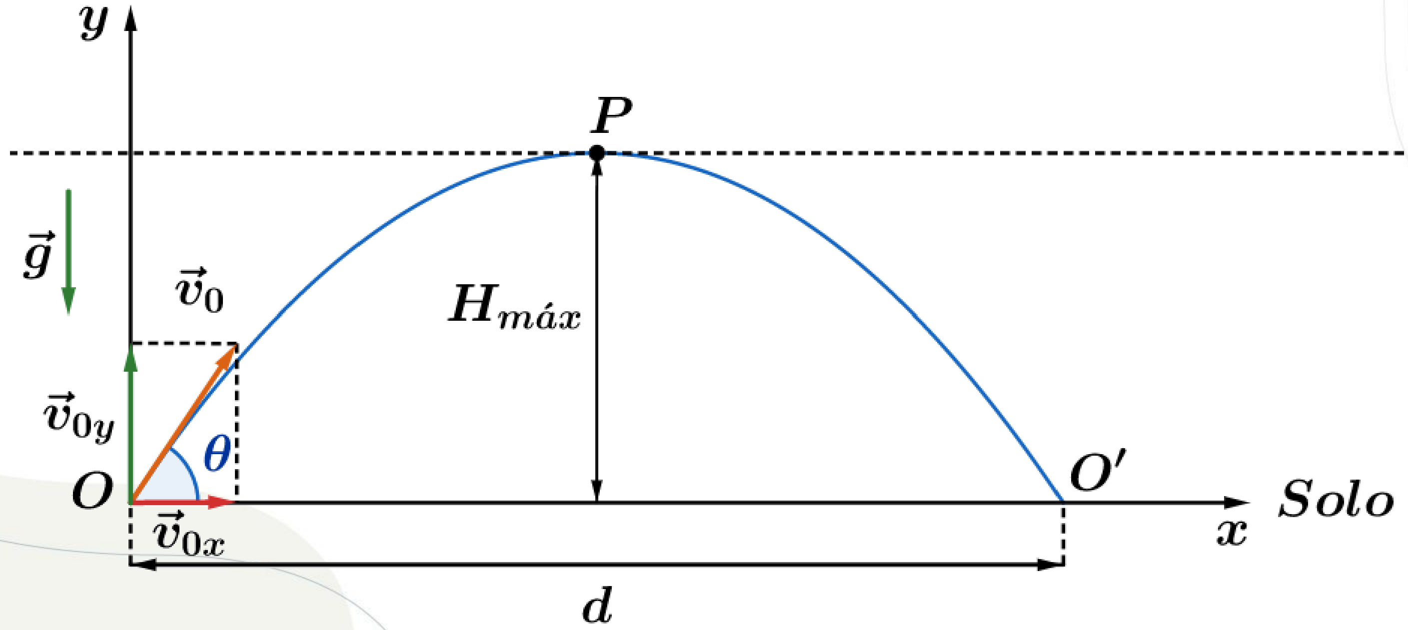
$$y = v_0 \cdot sen(\theta) \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta}\right) - \frac{g . \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\theta}\right)^2}{2}$$

Como $\frac{sen(\theta)}{\cos(\theta)} = \mathrm{tg}(\theta)$, $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$ para $\cos(\theta) \neq 0$ e $\sec^2(\theta) = 1 + tg^2(\theta)$, logo, temos que:

$$\boxed{y = x \cdot \mathrm{tg}(\theta) - \frac{g \cdot \left(1 + tg^2(\theta)\right)}{2v_0^2} \cdot x^2}$$

3.3. Equação da curva do lançamento oblíquo

$$\boxed{y = x.tg\theta - \frac{g(1+tg^2\theta)}{2v_0^2}.x^2}$$



Exemplo 10:

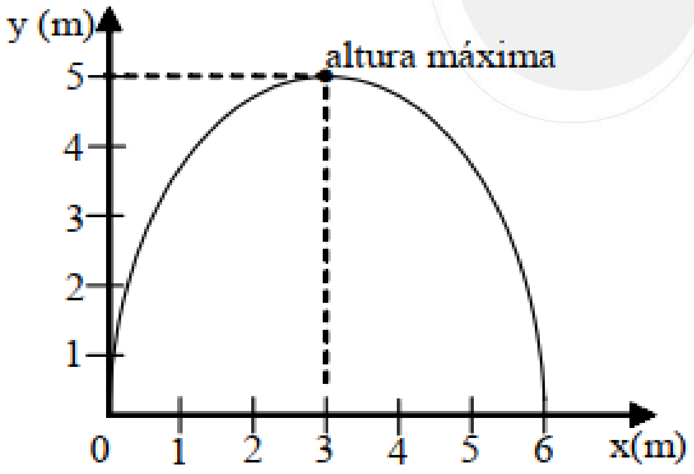
(EEAR – 2013) Uma partícula é lançada obliquamente a partir do solo e descreve o movimento representado no gráfico que relaciona a altura (y), em relação ao solo, em função da posição horizontal (x). Durante todo movimento, sobre a partícula, atua somente a gravidade cujo módulo no local é constante e igual a 10 m/s². O tempo, em segundos, que a partícula atinge a altura máxima é

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4



Exemplo 11:

(EN – 2013) Os gráficos abaixo foram obtidos da trajetória de um projétil, sendo y a distância vertical e x a distância horizontal percorrida pelo projétil. A componente vertical da velocidade, em m/s, do projétil no instante inicial vale:

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$

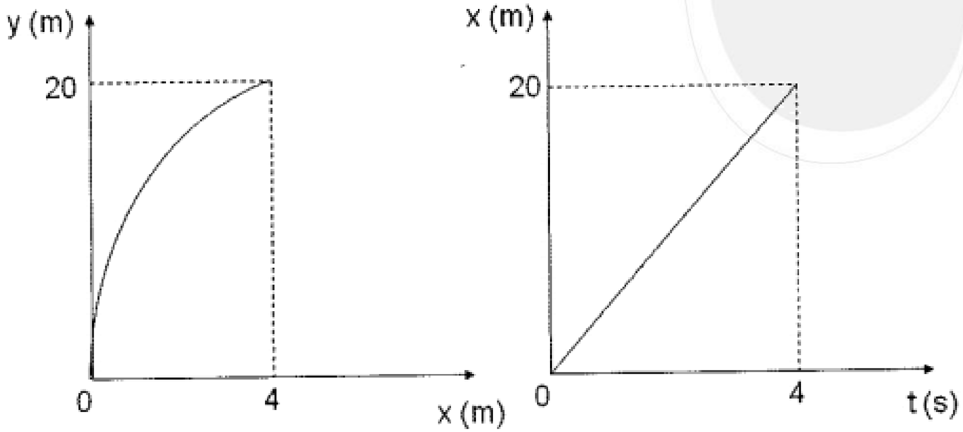
a) zero

b) 5,0

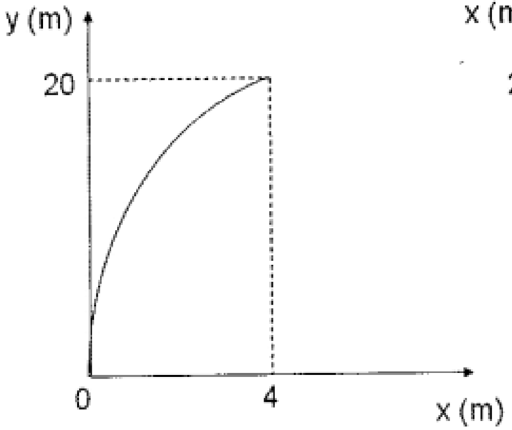
c) 10

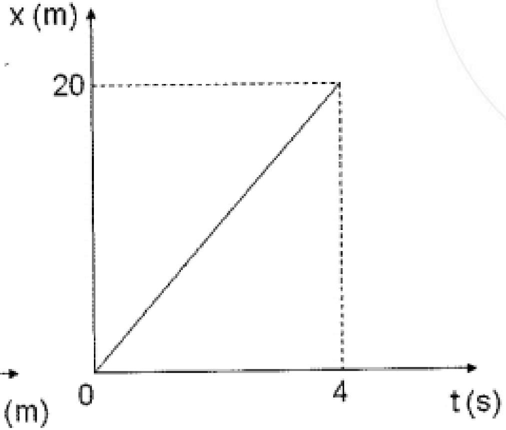
d) 17

e) 29



Exemplo 11:





Obrigado!

@proftoniburgatto

@estrategiamilitares

Estratégia
Militares