MATRIZES

GABARITO COMENTADO

1) $$\begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} abc - abc & b^2c - b^2c & bc^2 - bc^2 \\ -a^2c + a^2c & -abc + abc & -ac^2 + ac^2 \\ a^2b - a^2b & ab^2 - ab^2 & abc - abc \end{bmatrix} = \mathcal{O}_{3\times 3}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -abc + abc & a^2c - a^2c & -a^2b + a^2b \\ -b^2c + b^2c & abc - abc & -ab^2 + ab^2 \\ -bc^2 + bc^2 & ac^2 - ac^2 & -abc + abc \end{bmatrix} = \mathcal{O}_{3\times 3}$$

2) (**Letra B**) Em problemas como esse, a ideia é buscar um padrão de formação nas matrizes $A^2, A^3, A^4, \dots, A^n$, com n natural. Veja:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Acabou! rs

Se $A^2 = I$, sendo I a matriz identidade, então afirmamos que:

$$A^n = \begin{cases} A, & \text{se } n \text{ for ímpar} \\ I, & \text{se } n \text{ for par} \end{cases}$$

Portanto, $A^{2017} = A$.

3) () Idêntico ao problema anterior, olhe para as primeiras potências de M:

$$M^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Já podemos supor por hipótese que $M^n = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para $n \in \mathbb{N}$; de fato:

$$M^{n+1} = M^n \cdot M = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2(n+1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, $M^{2020} = \begin{bmatrix} 1 & 4040 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4) Esse problema é bem interessante, se você olhar sob a perspectiva certa. Ele se parece muito com problemas do tipo: *se* $x^3 = x + 1$, *calcule* x^{10}. Nesses casos, a ideia não é encontrar o valor de x, mas tentar encontrar o valor da expressão pedida por relações indiretas.

Veja que, se $M^2 = M - I$, então $M^2 - M + I = \mathcal{O}$. Multiplicando ambos os lados por $M + I$, teremos:

$$(M + I)(M^2 - M + I) = \mathcal{O} \Leftrightarrow M^3 + I = \mathcal{O} \Leftrightarrow \boxed{M^3 = -I}$$

Esta é uma relação muito boa porque envolve apenas a identidade numa potência de M. Agora:

$$M^{2003} = M^{2001} \cdot M^2 = (M^3)^{667} \cdot M^2 = (-I)^{667} \cdot M^2 = -M^2$$

Logo, como $M^2 = M - I$, então $M^{2003} = -M^2 = \boxed{I - M}$.

5) Veja:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 48 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 \cdot 2 & 1 & 0 \\ 16 \cdot (1 + 2) & 4 \cdot 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 48 & 8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 96 & 12 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 \cdot 3 & 1 & 0 \\ 16 \cdot (1 + 2 + 3) & 4 \cdot 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 12 & 1 & 0 \\ 96 & 12 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 16 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 0 \\ 160 & 16 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 \cdot 4 & 1 & 0 \\ 16 \cdot (1 + 2 + 3 + 4) & 4 \cdot 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Perceba um padrão de formação nas potências de P, que pode ser provado via Indução Finita:

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4n & 1 & 0 \\ 16(1 + 2 + \cdots + n) & 4n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4n & 1 & 0 \\ 16 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} & 4n & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, se $P^{10} - Q = I$, então $Q = P^{10} - I$:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4n & 1 & 0 \\ 16 \cdot \dfrac{n(n+1)}{2} & 4n & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 \\ 880 & 40 & 0 \end{bmatrix}}$$

6) (**Letra E**) Analisando as afirmativas:

I. (**Verdadeira**) Mantendo i fixo, os elementos da linha i são dados por $2^{i-1} \cdot 1$, $2^{i-1} \cdot 3$, $2^{i-1} \cdot 5$, $2^{i-1} \cdot 7$ e $2^{i-1} \cdot 9$; de outra forma, chamando 2^{i-1} de k, os elementos são da forma k, 3k, 5k, 7k e 9k, termos de uma PA de razão 2k= $2 \cdot 2^{i-2} = 2^{i}$.

II. (**Verdadeira**) Mantendo j fixo, os elementos da coluna j são dados por $2^{1-1} \cdot (2j-1)$, $2^{2-1} \cdot (2j-1)$, $2^{3-1} \cdot (2j-1)$, $2^{4-1} \cdot (2j-1)$ e $2^{5-1} \cdot (2j-1)$; de outra forma, chamando $2j-1$ de k, os elementos são da forma k, 2k, 4k, 8k e 16k, termos de uma PG de razão 2.

III. (**Verdadeira**) $tr(A) = \sum_{i=1}^{5} a_{ii} = 2^0 \cdot 1 + 2^1 \cdot 3 + 2^2 \cdot 5 + 2^3 \cdot 7 + 2^4 \cdot 9 = 227$, que é primo, pois não é divisível por nenhum fator primo menor que $\sqrt{227} \cong 15$.

7) (**Letra A**) Essencialmente neste problema queremos resolver a equação matricial $w = Av$, com $w = (64{,}107{,}29)$, A a matriz-código e $v = (x, y, z)$. Logo:

$$\begin{bmatrix} 64 \\ 107 \\ 29 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 64 \\ 3x + 3y + z = 107 \\ x + z = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 14 \\ 11 \end{bmatrix} \to SOL$$

8) (**Letra E**) Montando a matriz A, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1^1 & (-1)^2 \\ (-2)^1 & -2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Existe um dispositivo prático de cálculo de inversa 2×2:

- troque os elementos da diagonal principal de posição;
- troque o sinal dos elementos da diagonal secundária
- divida todos os elementos pelo determinante da matriz original

Assim, temos: $A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$.

9) Note inicialmente que A é uma matriz simétrica ($A^T = A$) e que B é uma matriz antissimétrica ($B^T = -B$). Assim, $B^T A + B A^T = -BA + BA = O$.

10)(**Letra E**) Para mostrar que uma matriz X é simétrica ou antissimétrica, devemos encontrar a relação entre a transposta de X e a própria matriz X. Analisando as afirmativas, usando o fato de que B é simétrica:

I. (**Verdadeira**) $(AB + BA^T)^T = (AB)^T + (BA^T)^T = B^T A^T + AB^T = BA^T + AB$.

II. (**Verdadeira**) $(A + A^T + B)^T = A^T + A + B^T = A^T + A + B$

III. (**Verdadeira**) $(ABA^T)^T = AB^TA^T = ABA^T$

11)

a. $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{bmatrix}$

b. Veja que $R^2 = \begin{bmatrix} \cos 120° & -\operatorname{sen} 120° \\ \operatorname{sen} 120° & \cos 120° \end{bmatrix}$ e $R^3 = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\operatorname{sen} 180° \\ \operatorname{sen} 180° & \cos 180° \end{bmatrix}$, ou seja, a multiplicação sucessiva de matrizes R leva a uma composição de rotações no mesmo sentido.

c. Podemos usar a ideia de matriz de rotação neste problema. Dados $A = (0,0)$ e $B = (3,4)$, o vetor AB é dado por $B - A = (3,4)$. Se girarmos este vetor 90°, encontraremos o vetor $AD = D - A = (a, b)$. Assim:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

12)(**Letra A**) Se A e B são inversíveis, podemos multiplicar ambos os lados da equação matricial por A^{-1} (à esquerda) e por B^{-1} (à direita), obtendo:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}PB^{-1} \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}PB^{-1}}$$

13)Este é um problema clássico de matrizes, cuja ideia principal é não tentar encontrar a inversa de uma matriz. Partindo de $B = P^{-1}AP$, multiplique ambos os lados da igualdade por P à esquerda, obtendo:

$$PB = AP$$

Como B é a matriz pedida, seja $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 3a + 4c & 3b + 4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ -10 & -10 \end{bmatrix}$$

Assim, temos os sistemas lineares $\begin{cases} a + 2c = 8 \\ 3a + 4c = -10 \end{cases}$ e $\begin{cases} b + 2d = 10 \\ 3b + 4d = -10 \end{cases}$, cujas soluções são $(a, c) = (-26,17)$ e $(b, d) = (-30,20)$. Portanto:

$$\boxed{B = \begin{bmatrix} -26 & -30 \\ 17 & 20 \end{bmatrix}}$$

14)Uma matriz quadrada é dita *ortogonal* quando sua inversa é igual à sua transposta, ou de outra forma: $AA^T = I$. Portanto:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \alpha & \alpha \\ 2\beta & \beta & -\beta \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\beta^2+\gamma^2 & 2\beta^2-\gamma^2 & -2\beta^2+\gamma^2 \\ 2\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 \\ -2\beta^2+\gamma^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, obtemos:

$$2\beta^2 = \gamma^2$$
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

Como $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 1$, então $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2(\beta^2+\gamma^2) = 3\gamma^2 = 1 \Leftrightarrow \gamma = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. Sendo assim $\beta^2 = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \beta = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$ e $\alpha^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15)

a. Observe a multiplicação AA^T:

$$AA^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} \\ a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} \end{bmatrix}$$

Perceba que os elementos b_{ii} da matriz AA^T são obtidos multiplicando-se a linha i de A e a coluna i de A^T, que são iguais. Por exemplo, o elemento b_{11} de AA^T será dado por $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2 + a_{15}^2$. Como $AA^T = \mathcal{O}$, então para que uma soma de quadrados se anule, é necessário e suficiente que $a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{15} = 0$. Analogamente para b_{22}, b_{33}, b_{44} e b_{55}, concluímos que $A = \mathcal{O}$.

b. $BAA^T - CAA^T = \mathcal{O} \Leftrightarrow (BA - CA)A^T = \mathcal{O} \Leftrightarrow (B - C)AA^T = \mathcal{O}$. Queremos usar o item anterior a nosso favor. Para tanto, lembre que $(AB)^T = B^TA^T$. Assim, multiplique ambos os lados da equação matricial por $(B - C)^T$:

$$(B-C)AA^T(B-C)^T = \mathcal{O} \Leftrightarrow (B-C)A \cdot \left((B-C)A\right)^T = \mathcal{O}$$

Pelo item anterior, a igualdade só é verdadeira se $(B - C)A = \mathcal{O}$, ou seja, se $BA = CA$.