

# **Aula 09 — Termometria e Dilatometria**

*IME 2020*

**Professor João Maldonado**

## SUMÁRIO

Introdução .....	3
1. Introdução à Termologia.....	3
1.1. A Noção de temperatura.....	3
1.2. Equilíbrio térmico .....	4
1.3. Termômetros .....	4
1.4. Escalas relativas usuais .....	6
1.4.1. Escala Celsius.....	6
1.4.2. Escala Fahrenheit .....	7
1.4.3. Relação entre as escalas relativas.....	8
1.4.4. A relação da variação de temperatura nas escalas relativas usuais.....	9
1.2. O zero absoluto e a escala absoluta .....	10
2. Dilatometria – dilatação dos sólidos .....	13
2.1. Dilatação linear dos sólidos.....	13
2.2. Tensão térmica .....	21
2.3. A lâmina bimetálica.....	23
2.4. Dilatação superficial dos sólidos .....	24
2.5. Dilatação volumétrica dos sólidos .....	28
2.6. Dilatação de sólidos anisotrópicos .....	30
2.7. A alteração da densidade com a temperatura.....	32
2.8 Dilatação de um sólido oco .....	33
3. Dilatação dos líquidos .....	34
3.1. Dilatação aparente.....	36
3.2. Comportamento anômalo da água .....	40
3.3. Dilatação dos gases.....	42
4. Lista de questões.....	44
5. Gabarito.....	60
6. Questões resolvidas e comentadas.....	62
7. Considerações finais da aula .....	102
8. Referências bibliográficas .....	103
9. Versão de aula .....	104





o ar no interior do balão, que ao ser aquecido, empurrou as paredes elásticas, estufando o nosso balão.

Podemos explicar esse fato pela análise da energia cinética das partículas no interior do balão. Inicialmente, as moléculas possuem uma certa energia cinética. Quando aumentamos a temperatura do conjunto, fornecemos uma quantidade de energia térmica que aumenta a energia cinética das pequenas partículas. Com isso, intensifica-se os choques das moléculas com as paredes internas do balão, em consequência, o volume do balão aumenta.

Dessa forma, associamos a temperatura do ar confinado no balão à energia cinética de suas partículas. Se analisarmos sólidos e líquidos, cujas partículas não possuem muita liberdade de movimento, o aumento na temperatura provoca um aumento na agitação das moléculas em determinadas regiões.

Com isso, podemos concluir que a temperatura está relacionada com o estado de movimento ou de agitação das partículas de um corpo. De outra forma, dizemos que temperatura é a medida da energia cinética média das moléculas.

Observação: a temperatura de um sistema é uma propriedade macroscópica que determina se o sistema está ou não em equilíbrio térmico com outros sistemas.

## 1.2. Equilíbrio térmico

Em um almoço de domingo, quando retiramos o frango assado do forno e o refrigerante da geladeira e colocamos sobre a mesa, notamos que, após um certo tempo, ambos estarão na temperatura ambiente. Dizemos que o frango esfriou e o refrigerante esquentou. Vemos nesse processo que dois corpos, sempre que possível, tendem espontaneamente para um mesmo estado térmico.

Assim, concluímos que corpos a temperatura maiores fornecem parte da energia de agitação de suas partículas para os corpos com temperatura menores. Após certo tempo, os corpos terão o mesmo estado térmico. Dizemos que os corpos atingiram o **equilíbrio térmico**.

Diante de um sistema em equilíbrio térmico, pode-se aplicar a chamada Lei Zero da Termodinâmica:

Dois ou mais sistemas estão em equilíbrio térmico entre si se suas temperaturas são iguais.

A lei zero permite definir as escalas termométricas.

## 1.3. Termômetros

Como se pode imaginar, não somos capazes de medir diretamente a energia de agitação das partículas de um corpo. Então, como vamos medir a temperatura? Para isso, devemos utilizar um processo indireto, utilizando um segundo corpo que sofra alterações mensuráveis em suas propriedades físicas quando atingido o equilíbrio térmico com o corpo de prova. Chamamos esse corpo de **termômetro**.



Para cada aplicação, pode ser interessante um tipo de termômetro. Por exemplo, é comum usar um termômetro de lâmina bimetálica em forma espiral, como mostrado na figura 1. Esse instrumento de medida é muito empregado em câmaras frigoríficas e fornos de padaria.

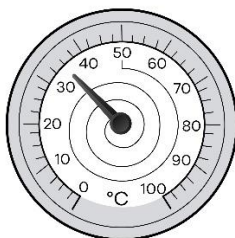


Figura 1: Termômetro de lâmina bimetálica utilizado em câmaras frigoríficas e fornos de padaria.

Para medir altas temperaturas, costuma-se utilizar o termômetro óptico ou pirômetro óptico. Ele se baseia na intensidade das radiações emitidas por um objeto muito aquecido. Normalmente, emprega-se esse aparelho em fundições e siderúrgicas. O ITA gosta de questões que analisam a influência da temperatura de um gás em diferentes pressões.

Por outro lado, para temperaturas muito baixas, é comum utilizar o termômetro a gás, a volume constante. De forma simplificada, podemos dizer que esse aparelho associa o valor da pressão do gás a um valor de temperatura. Geralmente, utiliza-se esse instrumento em laboratório de pesquisa.

O termômetro de gás a volume constante é constituído de um reservatório  $A$  que contém um gás conhecido (por exemplo hidrogênio, hélio, nitrogênio etc.). Além disso, um manômetro  $M$ , contendo mercúrio, é utilizado para medir a pressão do gás, quando conhecida a altura  $h$ . Além disso, utiliza-se um reservatório que contém mercúrio, com o objetivo de manter o volume do gás constante em  $A$ .

Quando alteramos a temperatura, o volume de gás varia, podendo baixar ou elevar verticalmente no reservatório e o volume de gás se manterá constante. Dessa forma, para cada temperatura do gás teremos uma pressão.

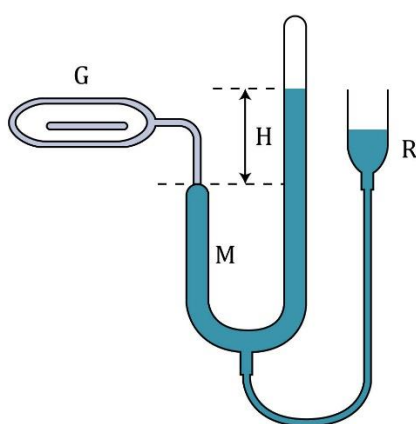


Figura 2: Esquema de um termômetro de gás a volume constante.

Um dos termômetros mais conhecido é o de mercúrio. O instrumento é constituído de uma haste graduada em certa unidade de medida, onde na parte inferior há um reservatório que armazena a **substância termométrica**. No nosso exemplo, temos que a substância é o mercúrio, mas poderia ser álcool, por exemplo.

Dentro da haste há um tubo bem estreito por onde a substância termométrica pode subir ou descer, de acordo com a temperatura a ser medida. Chamamos o valor da temperatura fornecida pela altura da coluna de **grandeza termométrica**.

Resumido:

- **Substância termométrica:** pelo menos uma de suas propriedades físicas (comprimento, volume, pressão etc.) varia de forma bem mensurável com a temperatura.
- **Grandeza termométrica:** propriedade física da substância termométrica que varia de forma determinável com a temperatura e é utilizada para medi-la.

Em um termômetro, geralmente, a grandeza termométrica varia praticamente de forma linear com a temperatura. É uma boa aproximação dizer que a grandeza termométrica ( $G$ ) se relaciona com a temperatura ( $\theta$ ) como uma função do primeiro grau:

$$G = a\theta + B$$

Onde  $a$  e  $b$  são constantes definidas experimentalmente para o termômetro utilizado.

Chamamos essa relação entre  $G$  e  $\theta$  de **equação termométrica**. Em terminologia, usamos a letra  $\theta$  para se referir a temperatura, pois usamos a letra  $T$  para representar outras grandezas físicas.

Da matemática, sabemos que para definir a equação de uma reta precisamos de duas informações. Assim, precisamos de valores arbitrários para a temperatura em dois estados térmicos bem definidos (pontos fixos), que possam ser realizados com facilidade. Normalmente, escolhemos como pontos fixos estados térmicos que correspondem a mudança de estado da substância pura, sob pressão normal, denominados pontos fixos fundamentais:

- 1) **Ponto do gelo:** temperatura em que gelo e água permanecem em equilíbrio térmico, sob pressão normal.
- 2) **Ponto do vapor:** temperatura em que a água entra em ebulição, sob pressão normal.

Em 1939, Francis Giauque defendeu a proposta de William Thomson, que é conhecido como Lorde Kelvin, que recomendava que as escalas termométricas usassem **um único ponto fixo**, o **ponto triplo da água** (temperatura na qual a água se apresenta em equilíbrio térmico os três estados físicos: sólido, líquido e gasoso). Para o ponto triplo temos pressão e temperatura iguais a 0,6117 kPa e 273,16 K, respectivamente. Em 1954 foi aprovada essa tese pela comunidade científica. Contudo, devido a praticidade, ainda utilizamos o ponto de gelo e o ponto de vapor como referência nas escalas termométricas.

## 1.4. Escalas relativas usuais

Existem duas escalas relativas muito utilizada no mundo: a escala Celsius e a escala Fahrenheit. A segunda é mais difundida nos Estados Unidos e na Inglaterra, enquanto a primeira é a escala mais utilizada no mundo.

### 1.4.1. Escala Celsius

Criada pelo físico sueco Anders Celsius (1701 – 1744) e oficializada em 1742 pela Real Sociedade Sueca. O curioso é que originalmente Celsius utilizou o valor 0 para o ponto de ebulição



e o valor 100 para o ponto de congelamento da água. Mais tarde, o biólogo Lineu (1707 - 1778) quem inverteu essa escala, deixando-a como utilizando hoje.

Nessa escala atribuímos os valores 0 para o ponto de gelo e 100 para o ponto de vapor.

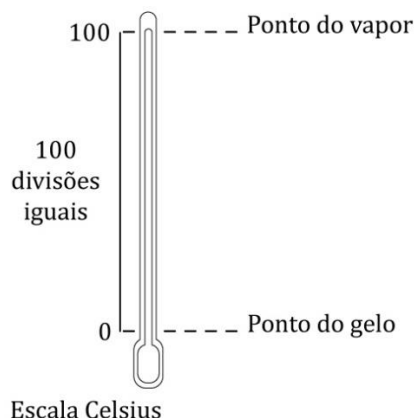


Figura 3: Representação da escala Celsius.

Na equação termométrica da escala, podemos dizer que:

$$\theta = a \cdot x + b$$

Onde  $x$  é a propriedade termométrica estudada, e  $a$  e  $b$  constantes termométricas a determinar.

Nesse caso:

- Ponto de gelo:  $\theta_G = 0^\circ C \Rightarrow x_G$ .
- Ponto de vapor:  $\theta_V = 100^\circ C \Rightarrow x_V$ .

Define-se intervalo fundamental o intervalo entre dois pontos fixos. Na escala Celsius, divide-se o intervalo fundamental em cem partes iguais. Dizemos que cada parte constitui a unidade da escala e chamamos essas subpartes de grau Celsius. Assim, um grau Celsius corresponde a um centésimo do intervalo fundamental.

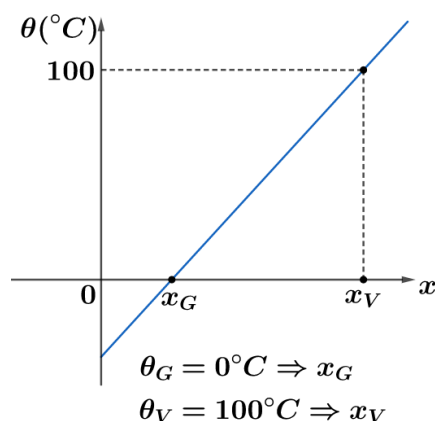


Figura 4: Gráfico da temperatura em Celsius em função do comprimento.

### 1.4.2. Escala Fahrenheit

Essa escala foi criada em 1708 pelo físico holandês Daniel Gabriel Fahrenheit (1686 – 1736), baseada nas ideias do astrônomo dinamarquês Ole Romer (1644 – 1710), que estabeleceu os pontos

de referência de uma nova escala. Para o ponto 0, Daniel utilizou a temperatura de uma mistura de gelo e cloreto de amônia e, para o ponto 100, a temperatura do corpo humano.

Posteriormente, passaram a utilizar a água como referência e observaram que a sua escala indicava 32 para o ponto de gelo e 212 para o ponto de vapor:

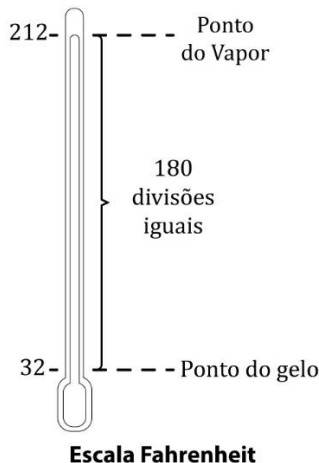


Figura 5: Esquema representativo da escala Fahrenheit.

Nessa escala, o intervalo fundamental é dividido em 180 partes iguais, onde cada uma delas constituem o grau Fahrenheit ( $^{\circ}F$ ).

Nesse caso:

- Ponto de gelo:  $\theta_G = 32^{\circ}C \Rightarrow x_G$ .
- Ponto de vapor:  $\theta_V = 212^{\circ}C \Rightarrow x_V$ .

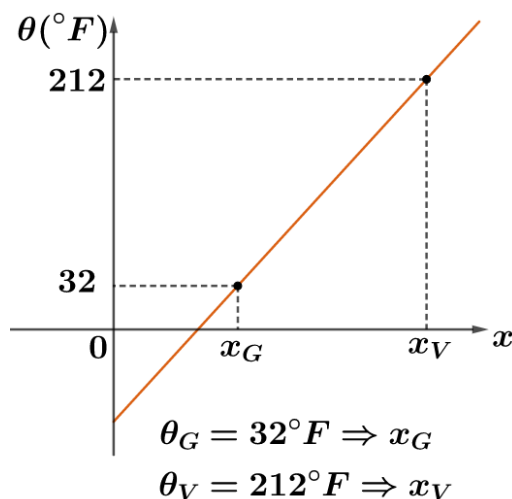


Figura 6: Gráfico da temperatura em Fahrenheit em função do comprimento.

### 1.4.3. Relação entre as escalas relativas

Sempre podemos criar uma relação entre duas escalas termométricas quaisquer. Quando visitamos os Estados Unidos e vemos um termômetro na rua, a primeira pergunta que surge é: que valor na escala Celsius corresponde  $86^{\circ}F$ ?



Para responder a essa pergunta, devemos estabelecer uma relação de correspondência entre as duas escalas. Nesse sentido, vamos utilizar dois termômetros idênticos de mercúrio, sendo um graduado em Celsius e outro em Fahrenheit. Quando colocamos um corpo em contato com os dois corpos, observamos as mesmas alturas de mercúrios, mas assinalando diferentes marcações em cada mercúrio ( $\theta_C$  e  $\theta_F$ ):

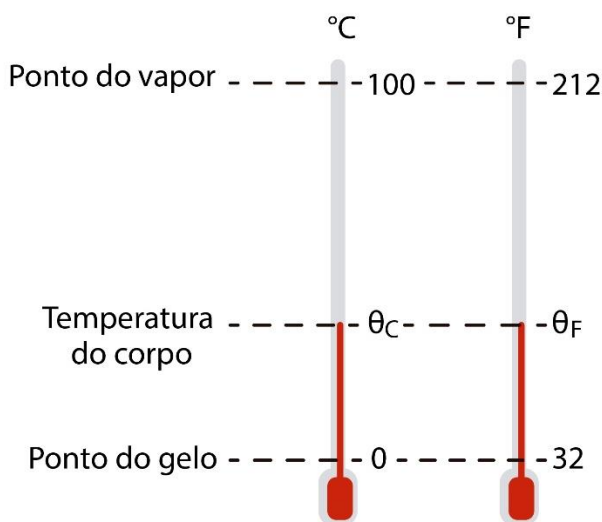


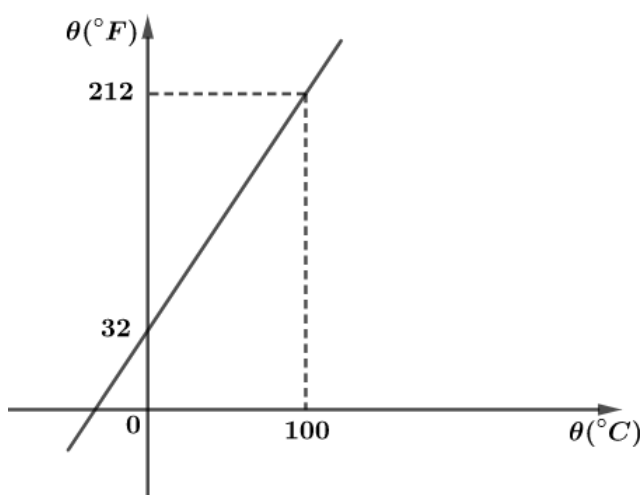
Figura 7: Relação entre as escalas relativas Celsius e Fahrenheit.

Note que os intervalos de temperaturas correspondentes são proporcionais, isto é:

$$\frac{\theta_C - 0}{\theta_F - 32} = \frac{100 - 0}{212 - 32}$$

$$\boxed{\frac{\theta_C}{5} = \frac{\theta_F - 32}{9}}$$

Graficamente, as escalas se relacionam da seguinte forma:



#### 1.4.4. A relação da variação de temperatura nas escalas relativas usuais

Se tomarmos duas temperaturas quaisquer em graus Celsius,  $\theta_{C1}$  e  $\theta_{C2}$ , temos seus respectivos valores em Fahrenheit, de acordo com a relação:



$$\frac{\theta_{C1}}{5} = \frac{\theta_{F1} - 32}{9}$$

$$\frac{\theta_{C2}}{5} = \frac{\theta_{F2} - 32}{9}$$

Fazendo a segunda menos a primeira, temos que:

$$\frac{\theta_{C2}}{5} - \frac{\theta_{C1}}{5} = \frac{\theta_{F2} - 32}{9} - \left( \frac{\theta_{F1} - 32}{9} \right)$$

$$\frac{\theta_{C2} - \theta_{C1}}{5} = \frac{\theta_{F2} - \theta_{F1}}{9}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\theta_C}{5} = \frac{\Delta\theta_F}{9}}$$

Tal resultado poderia ser facilmente obtido também observado a proporção nas escalas termométricas:

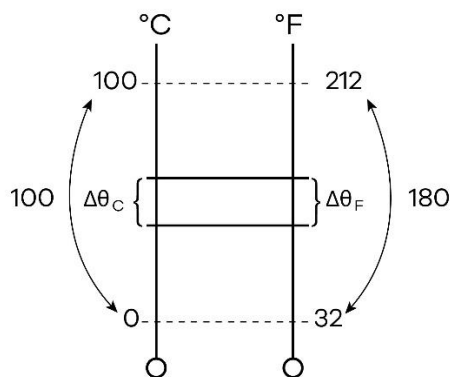


Figura 8: Relação entre as variações de temperaturas entre as escalas Celsius e Fahrenheit.

$$\frac{\Delta\theta_C}{100} = \frac{\Delta\theta_F}{180}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\theta_C}{5} = \frac{\Delta\theta_F}{9}}$$

## 1.2. O zero absoluto e a escala absoluta

Como vimos anteriormente, quando aquecemos um sistema físico qualquer, o estado de agitação das partículas aumenta também. Por outro lado, se esfriarmos nosso sistema, o estado de agitação das partículas também diminui. Mas o que aconteceria se começássemos a diminuir a temperatura cada vez mais?

O resultado seria que o estado de agitação das moléculas tenderia a diminuir cada vez mais, até uma temperatura mínima, chamada de **zero absoluto**. Nessa temperatura, temos a **energia fundamental (energia mínima)** da molécula. Não há energia cinética de translação, mas ainda tem energia potencial de vibração e energia potencial de rotação.

Zero absoluto é o limite inferior da temperatura de um dado sistema. É a temperatura na qual temos o menor estado de agitação das partículas possível, ou seja, praticamente nulo.

Em 1848, o físico inglês William Thomson (1824 – 1907), mais conhecido como Lorde Kelvin, verificou experimentalmente a variação da pressão de um gás a volume constante. Fazendo uma extrapolação do seu resultado, ele pode concluir que a menor temperatura que aquele gás poderia atingir coincidia com a anulação da pressão.

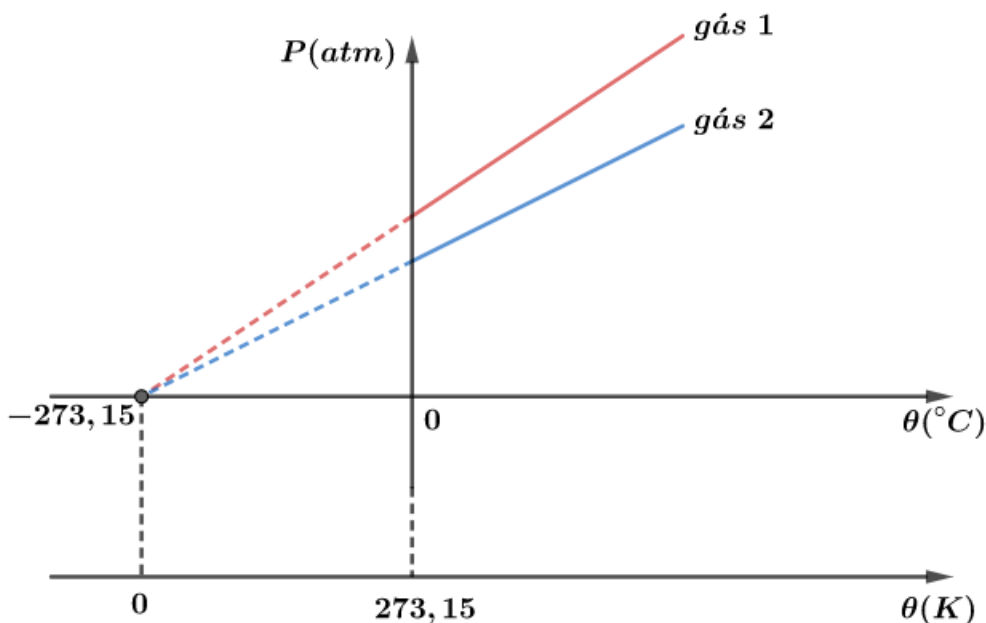


Figura 9: Gráfico da pressão pela temperatura de um gás, extrapolando para o zero absoluto.

Assim, foi definido como zero absoluto o estado térmico correspondente a temperatura de aproximadamente  $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$  (normalmente adota-se  $-273\text{ }^{\circ}\text{C}$  para facilitar os cálculos).

Essa escala tem origem no zero absoluto e utiliza o grau Celsius como unidade de variação. O símbolo utilizado na unidade é o  $K$ .

Dessa forma, a equação que define a conversão entre as escalas Kelvin e Celsius é dada por:

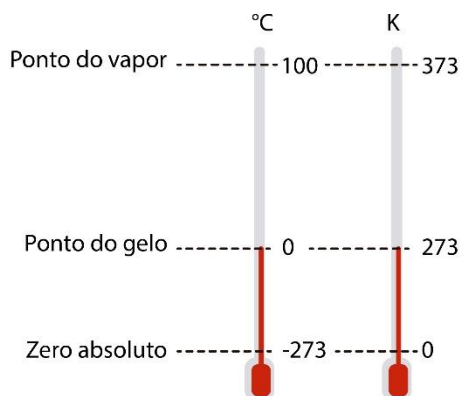


Figura 10: Relação das escalas Celsius e Kelvin

$$\theta(K) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273,15$$

Ou

$$\theta(^{\circ}C) = \theta(K) - 273,15$$

Note que:

$$\Delta\theta(K) = \Delta\theta(^{\circ}C)$$

Observação: a partir de 1967, convencionou-se não utilizar a palavra grau para a escala Kelvin. Dessa forma, lemos 50 K como 50 Kelvins e não 50 graus Kelvin.

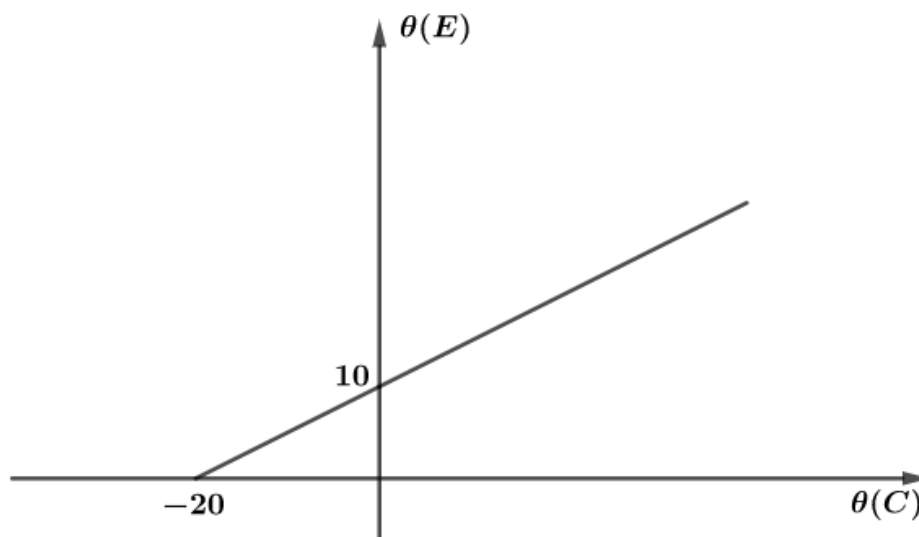
Além disso, devemos ter em mente sempre que a escala absoluta é definida tendo como ponto fixo o ponto triplo da água, onde a pressão é de 4,58 mmHg e a temperatura 0,01 °C.

Mais para frente, voltaremos a estudar o termômetro a gás, ampliando nossos conhecimentos sobre a escala absoluta.



1)

Um estudante construiu uma escala de temperatura E cuja relação com a escala Celsius é expressa no gráfico representado a seguir:



Qual a temperatura cujas leituras coincidem numericamente nessas duas escalas?

**Comentários:**

De acordo com o gráfico, temos que encontrar a relação da reta que relaciona  $\theta(C)$  e  $\theta(E)$ . Na matemática, aprendemos que:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Onde  $m$  é o coeficiente angular, dado por:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



$$m = \frac{10-0}{0-(-20)} = \frac{1}{2}$$

Logo, escolhendo um ponto bem determinado, por exemplo (0,10), temos:

$$y - 10 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 10$$

Ou seja:

$$\boxed{\theta(E) = \frac{1}{2}\theta(C) + 10}$$

Queremos que as leituras coincidam nas duas escalas, isto é,  $\theta(C) = \theta(E)$ , então:

$$\begin{cases} \theta(E) = \frac{1}{2}\theta(C) + 10 \\ \theta(C) = \theta(E) \end{cases} \Rightarrow \theta(C) = \frac{1}{2}\theta(C) + 10 \Rightarrow \boxed{\theta(C) = 20^\circ\text{C} = \theta(E)}$$



## 2. Dilatometria – dilatação dos sólidos

É o ramo da Física que estuda a dilatação dos corpos. Experimentalmente, verifica-se que ao variar a temperatura, as dimensões dos corpos também variam. Inicialmente, vamos estudar a dilatação térmica dos sólidos que podem ser divididos em sólidos isotrópicos e anisotrópicos.

Dizemos que um sólido é isotrópico quando suas propriedades físicas em torno de qualquer ponto independem da direção observada. De outra forma, quando variamos a temperatura de um corpo isotrópico, a dilatação será a mesma em todas as direções. Por outro lado, se o corpo não é isotrópico, ele recebe o nome de anisotrópico. Geralmente, os cristais são corpos anisotrópicos.

Diariamente, os efeitos da dilatação são levados em consideração nos projetos de engenharia. Desde construção de ferrovias a cimentação de uma calçada, consideramos o fato de que os sólidos ao dilatarem podem ou não afetar nossas estruturas físicas.

A análise da dilatação térmica é experimental. Normalmente, a dilatação é dividida em três tipos, dependendo das condições do problema. Para problemas em uma única dimensão, utilizamos a dilatação linear, para problemas em duas dimensões, temos a dilatação superficial e, para problemas em três dimensões, a dilatação volumétrica ou cúbica. Claro que ao aquecer um corpo físico que possui três dimensões, pode ocorrer da dilatação ser desprezível em alguma das dimensões e o problema ser tratado como dilatação superficial ou até mesmo dilatação linear, tudo depende do problema.

### 2.1. Dilatação linear dos sólidos

Experimentalmente, verifica-se que a variação do tamanho de uma barra ( $\Delta L$ ) depende do seu comprimento inicial ( $L_i$ ) e da variação de temperatura que ela sofre ( $\Delta\theta$ ).



Vamos considerar duas barras de mesmo material, mas comprimentos iniciais diferentes ( $L_{i_1}$  e  $L_{i_2}$ ). Ambas estão à mesma temperatura inicial e sofrerão a mesma variação de temperatura ( $\Delta\theta$ ). Assim, verifica-se experimentalmente que a barra maior dilata mais, ou seja, se  $L_{i_2} > L_{i_1}$ , então  $\Delta L_2 > \Delta L_1$ .

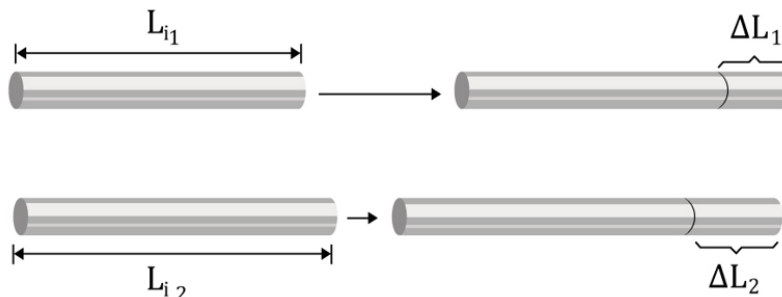


Figura 11: Sendo  $L_{i_2} > L_{i_1}$ ,  $\Delta L_2 > \Delta L_1$  para o mesmo  $\Delta\theta$ .

Quando analisamos a dilatação para variações de temperatura não tão grandes, é possível notar que  $\Delta L_i$  é diretamente proporcional ao tamanho inicial  $L_i$ . Atribuindo a constante e proporcionalidade de  $K_i$ , temos:

$$\frac{\Delta L}{L_i} = K_L$$

Observação: chamamos  $\Delta L/L$  de deformação relativa.

Agora, considere duas barras de mesmo tamanho inicial, e mesma temperatura inicial. Se ambas as barras sofrerem variações de temperaturas diferentes, com  $\Delta\theta_2 > \Delta\theta_1$ , então  $\Delta L_2 > \Delta L_1$ . Dentro de certas restrições, verificamos que a variação no comprimento é diretamente proporcional a variação de temperatura, ou seja:

$$\frac{\Delta L}{\Delta\theta} = K_\theta$$

Com isso, verificamos que a variação de comprimento de uma barra é diretamente proporcional ao comprimento inicial e a variação de temperatura sofrida pelo corpo. Assim, podemos definir a constante de proporcionalidade ( $\alpha$ ), denominada coeficiente de dilatação linear do material. Dessa forma, podemos escrever que:

$$\boxed{\Delta L = \alpha \cdot L_i \cdot \Delta\theta}$$

Ou ainda:

$$\alpha = \frac{\left(\frac{\Delta L}{L_i}\right)}{\Delta\theta}$$

A rigor, o valor de  $\alpha$  depende da temperatura inicial do intervalo térmico considerado. Desse modo, o  $\alpha_1$  para uma variação de 10 °C é diferente se ela ocorre de 5°C para 15°C ou se ocorre de 250 °C para 260°C. Entretanto, desde que o intervalo não seja muito amplo, consideraremos que o coeficiente de dilatação linear seja constante naquele intervalo, como é feito pelos vestibulares.

Algumas considerações sobre o coeficiente  $\alpha$ :



1. Sua unidade é o inverso do grau correspondente à escala empregada no problema, ou seja, se a variação da temperatura sofrida pela barra estiver em Fahrenheit, o  $\alpha$  é expresso na unidade com  $^{\circ}F^{-1}$ .
2. Geralmente, os coeficientes de dilatação linear são da ordem de  $10^{-6}$ . Assim, nas considerações teóricas, não levamos em consideração fatores do tipo  $\alpha^n$ , quando  $n \geq 2$ . Esse erro é considerado praticamente nulo, não afetando nossos cálculos práticos.

Diante disso, podemos expressar o comprimento final da barra da seguinte forma:

$$\Delta L = \alpha \cdot L_i \cdot \Delta \theta$$

$$L - L_i = \alpha \cdot L_i \cdot \Delta \theta$$

$$\boxed{L = L_i(1 + \alpha \cdot \Delta \theta)}$$

Denominamos  $(1 + \alpha \cdot \Delta \theta)$  binômio de dilatação linear.

Se fizermos um gráfico do comprimento em função da temperatura, teremos que:

$$\Delta L = \alpha \cdot L_i \cdot \Delta \theta$$

$$L - L_i = \alpha \cdot L_i \cdot (\theta - \theta_i)$$

$$L = (\alpha \cdot L_i)\theta + (L_i - \alpha \cdot L_i \cdot \theta_i)$$

Note que se trata de uma reta com coeficiente angular  $\alpha \cdot L_i$  e coeficiente linear  $L_i - \alpha \cdot L_i \cdot \theta_i$ . Assim, o gráfico é dado por:

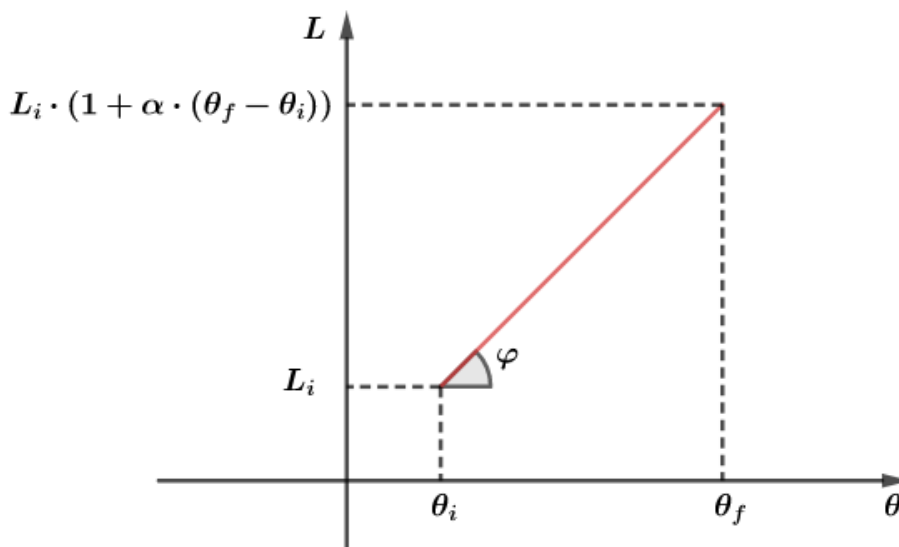


Figura 12: Gráfico do comprimento variando com a temperatura.

Onde verificamos que:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta L}{\Delta \theta} = \alpha \cdot L_i$$

Vamos fazer uma abordagem não tão comum sobre a dilatação térmica. Vamos definir que o coeficiente de dilatação seja dado por:



$$\alpha = \frac{\Delta L/L}{\Delta\theta}$$

Se tomarmos pequenos intervalos de temperatura, então teremos pequenas variações de comprimento. Tomando o limite quando  $\Delta\theta$  tende a zero, temos que:

$$\alpha = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta L/L}{\Delta\theta} = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\theta}$$

$$\alpha = \frac{1}{L} \frac{dL}{d\theta}$$

$$\alpha d\theta = \frac{1}{L} dL$$

Se considerarmos o intervalo de temperatura tão pequeno que o  $\alpha$  pode ser considerado constante, teríamos que:

$$\int_{\theta_i}^{\theta_f} \alpha d\theta = \int_{L_i}^{L_f} \frac{1}{L} dL$$

$$\alpha(\theta_f - \theta_i) = \ln L_f - \ln L_i$$

$$\alpha \cdot \Delta\theta = \ln \frac{L_f}{L_i}$$

$$\boxed{L_f = L_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}}$$

Dado que  $\alpha$  é bem pequeno, ao fazermos o gráfico de  $L \times \theta$  vemos que é praticamente uma reta. Então, fazer a aproximação para uma reta produz um erro muito pequeno.

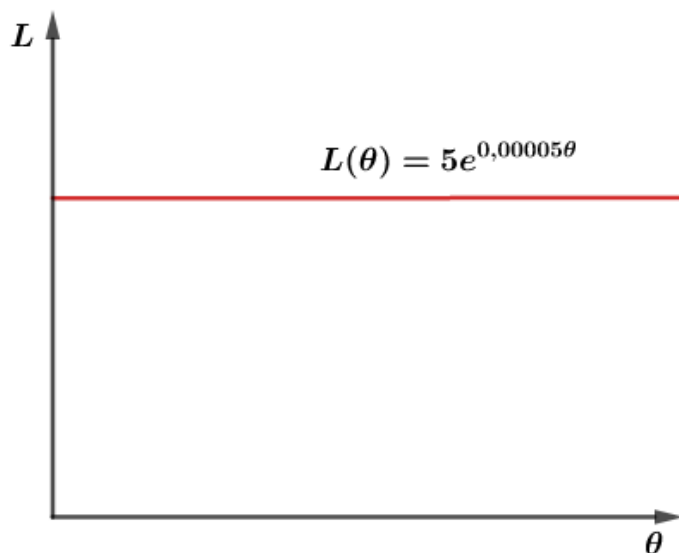


Figura 13: Gráfico do comprimento em função da temperatura para dilatação exponencial.

Se usarmos aproximação de Taylor (assunto que verá no seu primeiro ano da faculdade), podemos truncar da seguinte forma:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \frac{(x - x_0)^1}{1!} + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots$$





Considerando  $L(\theta) = L_i e^{\alpha \cdot \theta}$ , com isso,  $L'(\theta) = L_i \cdot \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \theta}$  e que  $x_0 = \theta_i$ , então temos que:

$$L(\theta) = L(\theta_i) + L'(\theta_i) \frac{(\theta - \theta_i)^1}{1!} + L''(\theta_i) \frac{(\theta - \theta_i)^2}{2!} + \dots$$

Como  $\alpha$  é muito pequeno, podemos dizer termos a partir de  $L''(\theta_i)$  são desprezíveis (chamamos de aproximação de primeira ordem), portanto:

$$L(\theta) \cong L_i + \alpha \cdot L_i \frac{(\theta - \theta_i)}{1}$$

$$\boxed{L(\theta) = L_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta} \cong L_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)}$$

Além disso, se  $\alpha$  varia com a temperatura, podemos calcular o coeficiente quando fazemos uma aproximação da seguinte forma:

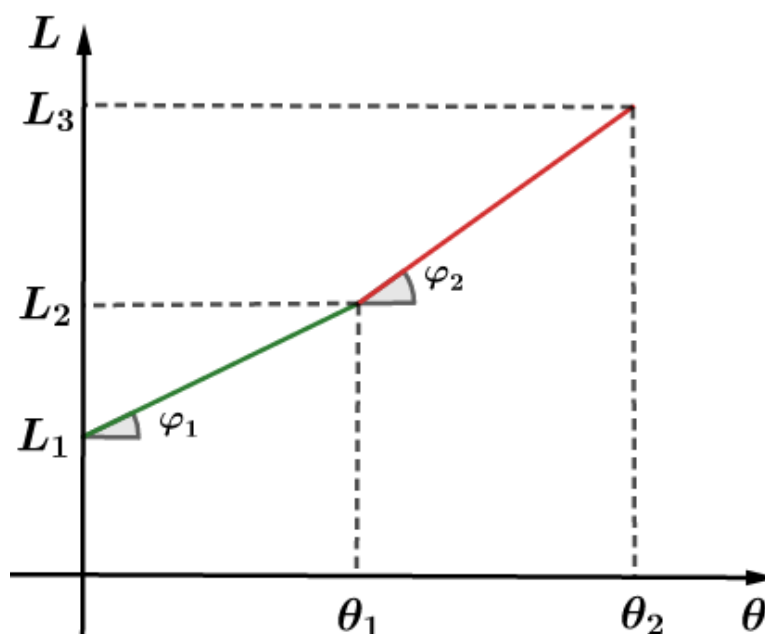


Figura 14: Gráfico do comprimento em função da temperatura para coeficiente de dilatação linear variando com a temperatura.

Podemos escrever a dilatação linear em cada trecho e considerar que  $\varphi_1 \cong \varphi_2$ , então:

$$\text{coef angular 1} = \text{coef angular 2}$$

$$\text{tg}(\varphi_1) = \text{tg}(\varphi_2)$$

$$L_1 \alpha_1 = L_2 \alpha_2$$

Mas,  $L_2 = L_1(1 + \alpha_1 \Delta\theta)$ , então:

$$L_1 \alpha_1 = L_1(1 + \alpha_1 \Delta\theta) \cdot \alpha_2$$

$$\boxed{\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1 \cdot \Delta\theta}}$$

Dado que  $\alpha_1$  é muito pequeno, então  $\alpha_1 \cdot \Delta\theta \ll 1$ , logo:

$$1 + \alpha_1 \cdot \Delta\theta \cong 1$$

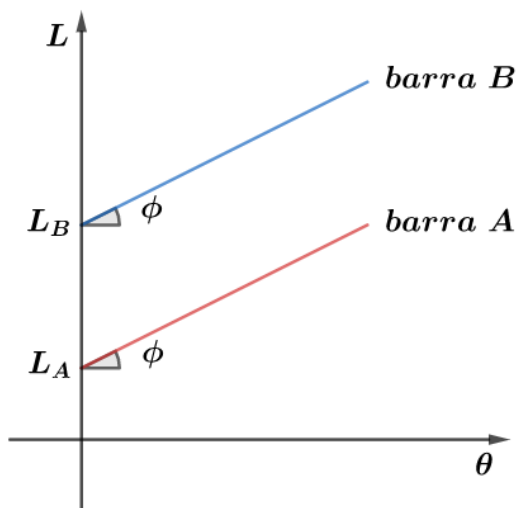
$$\alpha_1 \cong \alpha_2$$

ATENÇÃO  
DECORE!



2)

Considere o gráfico que representa a variação dos comprimentos das barras A e B, em função da temperatura. Qual das barras possuem o maior coeficiente de dilatação linear?



**Comentários:**

Notamos que as duas barras possuem o mesmo coeficiente angular, ou seja:

$$\alpha_A \cdot L_A = \alpha_B \cdot L_B$$

Pela construção do gráfico, o comprimento inicial da barra B é maior que o comprimento inicial da barra A, isto é,  $L_B > L_A$ . Portanto:

$$L_B > L_A$$

$$\frac{L_B}{L_A} > 1$$

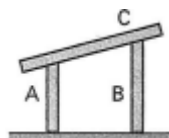
$$\alpha_B \left( \frac{L_B}{L_A} \right) > \alpha_B$$

Mas,  $\alpha_A = \frac{L_B}{L_A} \alpha_B$ , logo:

$$\boxed{\alpha_A > \alpha_B}$$

**3) (FEI – SP – modificada)**

As barras A e B da figura têm, respectivamente,  $L_{A_0}$  e  $L_{B_0}$  a  $\theta_0$ . Se os coeficientes são  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$ , qual deve ser a variação de temperatura para que a barra C fique na posição horizontal?



### Comentários:

No momento em que a barra C estiver na horizontal, os comprimentos finais das barras A e B serão iguais, portanto:

$$L_A = L_B$$
$$L_{A_0}(1 + \alpha_A \cdot \Delta\theta) = L_{B_0}(1 + \alpha_B \cdot \Delta\theta)$$

$$\Delta\theta = \frac{L_{A_0} - L_{B_0}}{L_{B_0} \cdot \alpha_B - L_{A_0} \cdot \alpha_A}$$

4)

Duas barras A e B, de coeficientes de dilatação linear  $\alpha_A$  e  $\alpha_B$  e comprimentos  $L_A$  e  $L_B$ , são emendados de modo a constituir uma única barra de comprimento  $(L_A + L_B)$ . Qual é o coeficiente de dilatação linear dessa nova barra?

### Comentários:

Lembrando que o coeficiente de dilatação linear é dado por:

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_i \Delta\theta}$$

Quando aquecemos o sistema de  $\Delta\theta$ , temos:

$$\Delta L_A = L_{A_i} \cdot \alpha_A \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta L_B = L_{B_i} \cdot \alpha_B \cdot \Delta\theta$$

Onde a deformação da nova barra é a soma das deformações:

$$\Delta L = \Delta L_A + \Delta L_B$$

Então:

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L_i \Delta\theta} = \frac{\Delta L_A + \Delta L_B}{(L_{A_i} + L_{B_i}) \Delta\theta} = \frac{L_{A_i} \cdot \alpha_A \cdot \Delta\theta + L_{B_i} \cdot \alpha_B \cdot \Delta\theta}{(L_{A_i} + L_{B_i}) \Delta\theta}$$

$$\alpha = \frac{L_{A_i} \cdot \alpha_A + L_{B_i} \cdot \alpha_B}{L_{A_i} + L_{B_i}}$$

A partir desse resultado, concluímos que o coeficiente de dilatação linear da nova barra será a média aritmética ponderada dos coeficientes já existentes, tendo como pesos os respectivos comprimentos iniciais.

5)



O fio de um pêndulo simples possui coeficiente de dilatação igual a  $1,0 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ . Quando o pêndulo está a  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$  o período de oscilação é de 4 segundos. Calcule o período de oscilação quando o pêndulo estiver a  $50 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Caso necessário utilize  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , se  $x \ll 1$ .

**Comentários:**

O período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Onde  $L$  é o comprimento do fio e  $g$  é a aceleração da gravidade local.

Dessa forma, temos dois períodos, já que a  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$  temos um comprimento inicial do fio e a  $50 \text{ } ^\circ\text{C}$  o fio sofreu uma dilatação térmica.

Assim, podemos escrever que:

$$T_i = 2\pi \sqrt{\frac{L_i}{g}} \text{ e } T_f = 2\pi \sqrt{\frac{L_f}{g}}$$

Pela lei da dilatação linear, o comprimento do fio a  $50 \text{ } ^\circ\text{C}$  pode ser expresso por:

$$L_f = L_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Fazendo uma relação dos dois períodos, vem:

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{L_f}{g}}}{2\pi \sqrt{\frac{L_i}{g}}}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{\sqrt{L_f}}{\sqrt{L_i}}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \sqrt{\frac{L_f}{L_i}}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \sqrt{\frac{L_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)}{L_i}}$$

$$\frac{T_f}{T_i} = \sqrt{1 + \alpha \cdot \Delta\theta}$$

Como  $\alpha \cdot \Delta\theta$  é muito pequeno, podemos utilizar a aproximação:

$$\frac{T_f}{T_i} = (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\frac{T_f}{T_i} \cong 1 + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}$$

Substituindo valores, encontramos que:

$$\frac{T_f}{4} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \cdot 40$$

$$T_f = 4 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,0 \cdot 10^{-6} \cdot 40$$

$$\boxed{T_f = 4,00008 \text{ s}}$$



Perceba que a diferença no período é muito pequena (0,00008 s). Em relógios antigos, onde se usava pêndulos para seu funcionamento, quando aquecia o conjunto com uma certa amplitude de temperatura, verificava-se um atraso no seu funcionamento, pois o período aumentava.

6)

Ao medir o comprimento de uma barra de ferro a  $\theta_f$ , com uma régua de cobre, obteve-se a leitura de  $L$ . A régua foi graduada na temperatura  $\theta_0$ , determine o comprimento real da barra.

### Comentários:

Note que o valor  $L$  obtido, não levou em consideração o fato que o instrumento de medida, no caso a barra de cobre, também dilatou. Se a unidade de graduação da barra de cobre era  $u_0$  a  $\theta_0$ , então, a  $\theta_f$ , a unidade de graduação passou a ser:

$$u_f = u_0(1 + \alpha_{cu}\Delta\theta)$$

Assim, notamos que o comprimento da barra medida é o comprimento da barra real vezes a nova unidade de graduação:

$$L_{real} = L_{medido} \cdot u_f$$

$$L_{real} = L \cdot u_0 \cdot (1 + \alpha_{cu}\Delta\theta)$$



## 2.2. Tensão térmica

Quando as extremidades de uma barra são fixas, ao aquecer nosso corpo surgirão **tensões térmicas**, pois há um impedimento de dilatação. Tais tensões podem ser muito intensas e chega a atingir o limite de elasticidade do material ou até mesmo o limite de ruptura da barra.

As forças que surgem podem ser consideradas, dentro de um intervalo considerável, como diretamente proporcional a dilatação, como na Lei de Hooke:

$$F = k \cdot \Delta x$$

Se considerarmos uma barra de comprimento  $L$ , presa entre duas paredes indeformáveis e que não se deslocam:



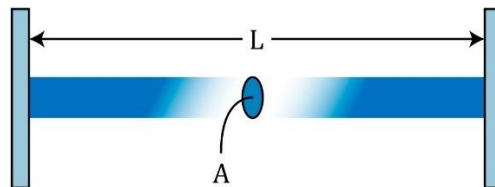


Figura 15: Barra fixada nas duas extremidades.

Ao aquecer a barra, ela não consegue se dilatar, já que está presa nas extremidades. Assim, forças de tensão internas podem encurvar a barra. Se admitirmos que a barra não se curve e caso ela estivesse livre, teríamos uma deformação  $\Delta L$  da barra. Com isso, sabemos que:

$$\Delta L = L \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

Define-se módulo de Young como sendo:

$$Y = \frac{\text{Tensão}}{\text{Deformação relativa}}$$

Onde a unidade de  $Y$  é  $N/m^2$ . É comum representar o módulo de Young pela letra  $E$ .

Dessa forma, temos que:

$$Y = \frac{\text{Tensão}}{\text{Deformação relativa}} = \frac{F}{A_{\text{transversal}} \frac{\Delta L}{L}}$$

$$\frac{F}{A} = Y \frac{\Delta L}{L}$$

$$\frac{F}{A} = Y \cdot \alpha \cdot \Delta \theta \quad \text{ou} \quad F = Y \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta \theta$$

Com esse resultado, podemos ver que um fenômeno mecânico produzido em consequência da ação térmica tem como efeito opor-se ao fenômeno térmico.

ATENÇÃO  
DECORE!



### 7) (FEI – SP)

Um fio de aço de seção transversal  $A = 1,0 \text{ mm}^2$ , com coeficiente de dilatação linear  $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  e módulo de elasticidade  $E = 2,2 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$ , sustenta na vertical um corpo de peso  $P$ . O fio experimenta uma variação de temperatura  $\Delta \theta = -20 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Qual o acréscimo que se deve dar ao peso  $P$  de forma que o comprimento do fio não se altere?

#### Comentários:

Dado que a força para não variar a dimensão do fio é expressa por:



$$F = E \cdot A \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$$

Substituindo os valores e adequando as unidades, vem:

$$F = 2,2 \cdot 10^7 \cdot 1,0 \cdot 10^{-2} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot |-20|$$

$$F = 52,8 \text{ N}$$

### 2.3. A lâmina bimetálica

Denominamos lâmina bimetálica o conjunto formado por duas tiras metálicas, com coeficientes de dilatação diferentes, soldadas ou rebitadas entre si.

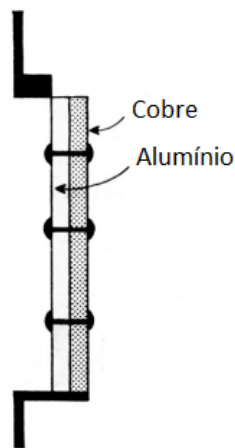


Figura 16: Lâmina bimetálica sem sofrer aquecimento.

Devido ao fato da lâmina bimetálica ser constituída de dois materiais com coeficientes de dilatação térmica diferentes, ao aquecer o conjunto uma das barras possuirá uma maior variação no seu comprimento. No nosso caso, temos que  $\alpha_{\text{alumínio}} = 24 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e  $\alpha_{\text{cobre}} = 16 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Dessa forma, o alumínio ocupa a face convexa, já que sofre maior variação no seu comprimento.

Devido ao fato de as lâminas metálicas estarem rigidamente unidas, ao aquecer surgem forças de tensões internas que curvarão o conjunto para o lado da chapa menor. Um exemplo de aplicação é no chaveamento elétrico, onde ao passar uma corrente elétrica no conjunto, devido ao efeito Joule, haverá um aquecimento das tiras e o encurvamento das lâminas:

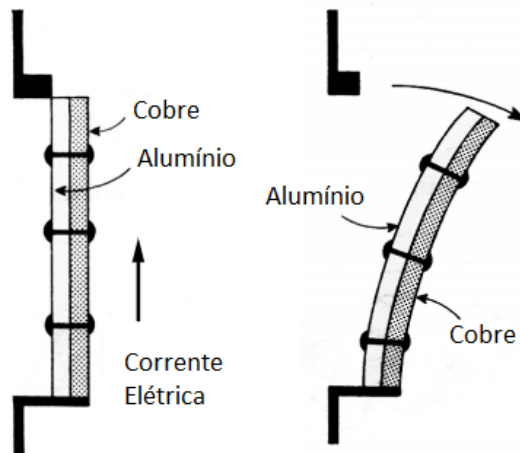


Figura 17: Lâmina bimetálica sofrendo aquecimento.

Esse sistema é muito utilizado em circuitos elétricos com objetivo de fazer chaveamento, sem a necessidade de um operador humano. Após certo tempo, o conjunto se resfria e se contrai. Ao voltar ao comprimento inicial, a lâmina fecha o circuito e, assim, volta a ter corrente elétrica no circuito, como no exemplo abaixo:

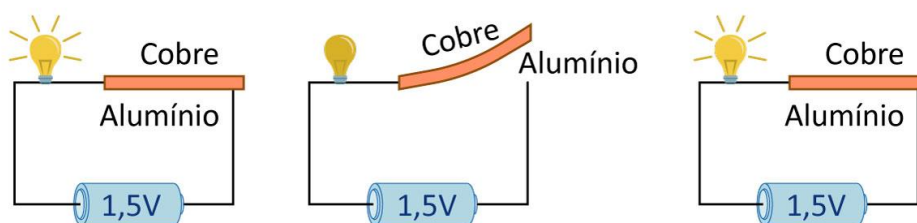
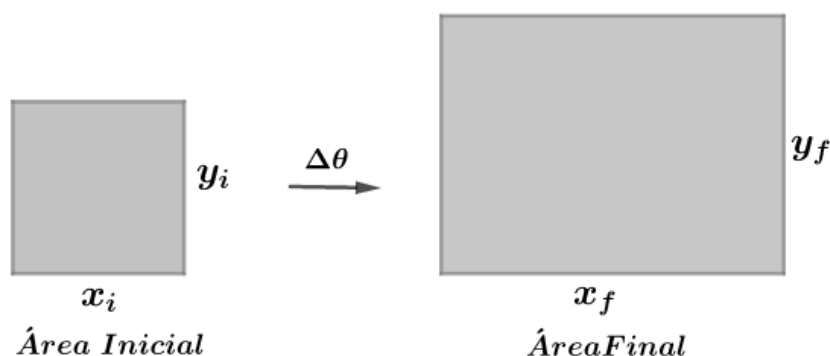


Figura 18: Lâmina bimetálica fazendo chaveamento do circuito.

## 2.4. Dilatação superficial dos sólidos

Dado uma superfície com área  $A_i$  de dimensões  $x_i$  e  $y_i$ , quando aquecemos por igual a chapa, ocorrerá dilatação linear em cada direção. Se considerarmos o material isotrópico, o coeficiente de dilatação linear será o mesmo em qualquer dimensão. Assim, temos que:



A área inicial da superfície pode ser dada por:

$$A_i = x_i \cdot y_i$$

Aplicando a lei da dilatação linear para cada uma das dimensões, temos que:





$$x_f = x_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$y_f = y_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Com isso, a área final pode ser escrita como:

$$A_f = x_f \cdot y_f$$

$$A_f = x_i \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta) \cdot y_i \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$A_f = x_i \cdot y_i \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^2$$

$$A_f = A_i \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^2$$

Ao desenvolver o produto notável, temos:

$$(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^2 = 1^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta + \alpha^2 \cdot (\Delta\theta)^2$$

Como vimos, os coeficientes de dilatação linear dos materiais são da ordem de  $10^{-6}$ , então  $\alpha^2$  é muito pequeno, tornando  $\alpha^2 \cdot (\Delta\theta)^2$  pode ser considerado desprezível, portanto:

$$(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^2 \cong 1^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$$

Com esse resultado, chegamos que:

$$A_f = A_i \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta)$$

O termo  $2 \cdot \alpha$  é indicado por  $\beta$  e chamado de coeficiente de dilatação superficial do material de que é feita a placa. Então, podemos escrever que:

$$A_f = A_i \cdot (1 + \beta \cdot \Delta\theta)$$

Onde  $(1 + \beta \cdot \Delta\theta)$  é chamado de binômio de dilatação superficial do material para o  $\Delta\theta$ .

Se desenvolvermos a equação acima, podemos escrever a variação da área para uma dada variação de temperatura:

$$A_f = A_i \cdot (1 + \beta \cdot \Delta\theta)$$

$$A_f = A_i + A_i \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

$$A_f - A_i = A_i \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta A = A_i \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

Assim, a lei de dilatação superficial mostra que a variação da área superfície ( $\Delta A$ ) é diretamente proporcional à área inicial ( $A_i$ ) e a variação de temperatura sofrida pelo corpo ( $\Delta\theta$ ).

Vale lembrar que nós consideraremos nos exercícios que o  $\beta$  obtido ou fornecido na questão é um valor médio correspondente ao intervalo de temperatura em questão. Assim como o  $\alpha$ ,  $\beta$  também depende da temperatura.



Assim como fizemos para a dilatação linear, poderíamos fazer um tratamento considerando a dilatação superficial como uma função exponencial. Dessa forma, teríamos que cada dimensão varia de forma exponencial e que o corpo fosse isotrópico. Com isso, chegaríamos que:

$$x_f = x_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}$$

$$y_f = y_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}$$

$$A_f = x_f \cdot y_f$$

$$A_f = (x_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}) \cdot (y_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta})$$

$$A_f = x_i \cdot y_i \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}$$

$$A_f = A_i \cdot e^{2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}$$

Fazendo  $\beta = 2 \cdot \alpha$ , chegamos que:

$$A_f = A_i \cdot e^{\beta \cdot \Delta\theta}$$

Resultado semelhante ao encontrado para a dilatação exponencial em uma dimensão.



### 8) (Mackenzie – SP)

Uma chapa plana de uma liga metálica de coeficiente de dilatação linear  $2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$  tem área  $A_0$  à temperatura de  $20 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Para que a área dessa placa aumente 1%, devemos elevar a sua temperatura para:

- a)  $520 \text{ } ^\circ\text{C}$
- b)  $470 \text{ } ^\circ\text{C}$
- c)  $320 \text{ } ^\circ\text{C}$
- d)  $270 \text{ } ^\circ\text{C}$
- e)  $170 \text{ } ^\circ\text{C}$

#### Comentários:

Pela lei da dilatação superficial, temos que:

$$\Delta A = A \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

Perceba que 1 % representa o quanto variou em relação ao inicial, isto é:

$$\frac{\Delta A}{A} = 1\%$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \beta \cdot \Delta\theta$$



$$\frac{1}{100} = 2 \cdot 2 \cdot 10^{-5} \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = 250 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\theta_f - \theta_i = 250$$

$$\theta_f - 20 = 250$$

$$\boxed{\theta_f = 270 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

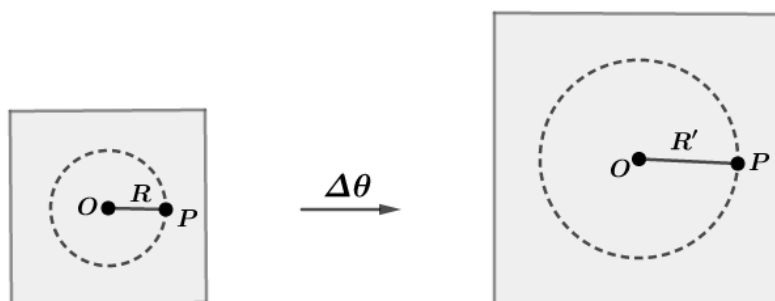
Alternativa correta letra d.

9)

Numa chapa de latão, a  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$ , um furo circular possui raio de 10 cm. Determine a o acréscimo na área do orifício, quando se aumenta a temperatura da chapa para  $260 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Considere o coeficiente linear do latão igual a  $2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

**Comentários:**

Imagine que o chapa não tivesse o furo. Assim, se consideramos um ponto  $P$  a uma distância  $R$  do ponto  $O$ , ao esquentar a chapa vemos que  $R$  aumenta:



Dessa forma, a área inicial é dada por:

$$A_0 = \pi R^2 = 3,14 \cdot (10)^2 = 314 \text{ cm}^2$$

Utilizando a expressão simplificada da dilatação superficial, encontramos que:

$$\Delta A = A_0 \cdot \beta \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta A = 314 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 10^{-5}) \cdot (260 - 10)$$

$$\Delta A = 3,14 \text{ cm}^2$$

Assim, se retirarmos a porção de material no interior da circunferência tracejada, vemos que se trata do nosso problema do furo. Isso vai contra a ideia primitiva de que ao esquentar uma chapa com orifício, o raio do furo iria diminuir. Ao contrário, vimos que ele também aumenta.

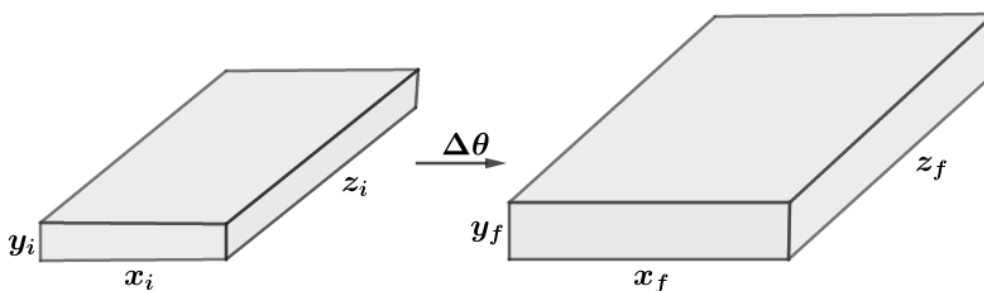


## 2.5. Dilatação volumétrica dos sólidos

Vamos analisar a variação do volume de corpo, a partir da dilatação linear de cada dimensão. Para isso, considere um paralelepípedo que possui as dimensões  $x_i, y_i$  e  $z_i$  na temperatura  $\theta_i$ . Seu volume nessa condição é dado por:

$$V_i = x_i \cdot y_i \cdot z_i$$

Ao variarmos a temperatura do sistema para  $\theta_f$ , observamos que os lados passaram a ser  $x_f, y_f$  e  $z_f$ .



Fazendo a lei da dilatação linear em cada dimensão e considerando nosso corpo isotrópico, obtemos:

$$x_f = x_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$y_f = y_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

$$z_f = z_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Dessa forma, o novo volume será dado por:

$$V_f = x_f \cdot y_f \cdot z_f$$

$$V_f = (x_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)) \cdot (y_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)) \cdot (z_i(1 + \alpha \cdot \Delta\theta))$$

$$V_f = x_i \cdot y_i \cdot z_i \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^3$$

Expandindo o produto notável  $(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^3$ , teremos:

$$(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^3 = 1 + 3 \cdot 1^2 \cdot (\alpha \cdot \Delta\theta) + 3 \cdot 1 \cdot (\alpha \cdot \Delta\theta)^2 + (\alpha \cdot \Delta\theta)^3$$

Os termos  $3 \cdot 1 \cdot (\alpha \cdot \Delta\theta)^2$  e  $(\alpha \cdot \Delta\theta)^3$  podem ser considerados desprezíveis, já que  $\alpha$  é muito pequeno. Portanto:

$$(1 + \alpha \cdot \Delta\theta)^3 = 1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta$$

Dessa forma, podemos reescrever a expressão do volume final:

$$V_f = x_i \cdot y_i \cdot z_i \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta)$$

Como  $V_i = x_i \cdot y_i \cdot z_i$  e chamando  $3 \cdot \alpha$  de coeficiente de dilatação volumétrica ou cúbica do material, representado pela letra  $\gamma$ , chegamos que:

$$V_f = V_i(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

Onde  $\gamma = 3\alpha$ . Chamamos o termo adimensional  $(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$  de binômio da dilatação volumétrica ou cúbica do material para o  $\Delta\theta$ .

Expandindo a expressão do volume final, podemos determinar a variação volumétrica sofrida pelo sólido:

$$V_f = V_i(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

$$V_f = V_i + V_i \cdot \gamma \cdot \Delta\theta$$

$$V_f - V_i = V_i \cdot \gamma \cdot \Delta\theta$$

$$\boxed{\Delta V = V_i \cdot \gamma \cdot \Delta\theta}$$

Novamente, considere sempre que  $\gamma$  é constante no intervalo de temperatura trabalhado, como sendo um valor médio. Contudo, sabemos que o coeficiente de dilatação volumétrica depende da temperatura.



Podemos fazer o tratamento da expansão volumétrica como sendo exponencial. Se considerarmos que as dimensões se dilatam de forma exponencial e que o material é isotrópico, temos que:

$$x_f = x_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}$$

$$y_f = y_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}$$

$$z_f = z_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}$$

Assim, o volume final é dado por:

$$V_f = x_f \cdot y_f \cdot z_f$$

$$V_f = (x_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}) \cdot (y_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta}) \cdot (z_i \cdot e^{\alpha \cdot \Delta\theta})$$

$$V_f = x_i \cdot y_i \cdot z_i \cdot e^{3 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta}$$

Chamando  $3\alpha$  de  $\gamma$ , temos que:

$$\boxed{V_f = V_i \cdot e^{\gamma \cdot \Delta\theta}}$$

Existem materiais com elevado coeficiente de dilatação, como grande parte dos metais. O vidro pirex possui um coeficiente de dilatação pequeno, bem menor que o vidro comum e isso garante que ele suporte grandes variações de temperatura sem gerar grandes tensões internas na sua estrutura. Tal fato garante ao vidro pirex a possibilidade de ir ao fogo.

Há ainda materiais com coeficiente de dilatação negativo, como é o caso da borracha vulcanizada. Estes materiais quando submetidos a aumento de temperatura diminuem suas dimensões.





## 2.6. Dilatação de sólidos anisótropos

Nas nossas abordagens, sempre consideramos que nossos sólidos eram isotrópicos, ou seja, o coeficiente de dilatação é o mesmo em qualquer direção.

Contudo, existem sólidos cristalinos que em cada direção existe um valor de coeficiente de dilatação. Esses cristais são chamados de anisótropos. Como consequência disso, quando esses corpos são aquecidos, não existe uma simetria nas dilatações.

Sempre é possível descrever as dimensões de um sólido através de três eixos perpendiculares entre si, de tal forma que as dilatações ocorreram nas direções dos eixos. Tais direções são chamadas de **eixos principais de dilatação** e os coeficientes de dilatação linear relativos a essas direções são denominados **coeficientes de dilatação linear principais**.

Chamando de  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$  e  $\alpha_z$  os coeficientes de dilatação linear principais de um cristal. Vamos considerar que nosso cristal é um paralelepípedo, cujas dimensões são  $L_{x_0}$ ,  $L_{y_0}$  e  $L_{z_0}$  na temperatura  $\theta_i$ . Se aquecermos nosso cristal para a temperatura  $\theta_f$ , então, teremos as novas dimensões:

$$L_x = L_{x_0}(1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta)$$

$$L_y = L_{y_0}(1 + \alpha_y \cdot \Delta\theta)$$

$$L_z = L_{z_0}(1 + \alpha_z \cdot \Delta\theta)$$

Logo, o novo volume será de:

$$V_f = L_x \cdot L_y \cdot L_z$$

$$V_f = [L_{x_0}(1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta)] \cdot [L_{y_0}(1 + \alpha_y \cdot \Delta\theta)] \cdot [L_{z_0}(1 + \alpha_z \cdot \Delta\theta)]$$

$$V_f = L_{x_0} \cdot L_{y_0} \cdot L_{z_0} \cdot (1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_y \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_z \cdot \Delta\theta)$$

Vamos desenvolver o produto  $(1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_y \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_z \cdot \Delta\theta)$  e desprezar termos pequenos, já que os coeficientes de dilatação são muito pequenos:

$$1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta + \alpha_y \cdot \Delta\theta + \alpha_z \cdot \Delta\theta + \alpha_x \alpha_y \cdot \Delta\theta^2 + \alpha_x \alpha_z \cdot \Delta\theta^2 + \alpha_y \alpha_z \cdot \Delta\theta^2 + \alpha_x \alpha_y \alpha_z \cdot \Delta\theta^3$$

Termos como  $\alpha_x \alpha_y \cdot \Delta\theta^2 + \alpha_x \alpha_z \cdot \Delta\theta^2 + \alpha_y \alpha_z \cdot \Delta\theta^2 + \alpha_x \alpha_y \alpha_z \cdot \Delta\theta^3$  podem ser desconsiderados, já que os coeficientes de dilatação são da ordem de  $10^{-6}$ . Assim, chegamos que:

$$(1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_y \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_z \cdot \Delta\theta) \cong 1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta + \alpha_y \cdot \Delta\theta + \alpha_z \cdot \Delta\theta$$

$$(1 + \alpha_x \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_y \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \alpha_z \cdot \Delta\theta) \cong 1 + (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)\Delta\theta$$

Portanto, o volume final pode ser expresso por:

$$V_f = V_0(1 + (\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z)\Delta\theta)$$

Denominando o coeficiente de dilatação volumétrica  $\gamma = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z$ , chegamos que:



$$V_f = V_0(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

ATENÇÃO  
DECORE!



### 10) (ITA – SP)

Um cristal (anisótropo) tem o coeficiente de dilatação linear  $\alpha_x = 1,3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  na direção do eixo  $x$ . Na direção dos eixos  $y$  e  $z$  o coeficiente de dilatação linear é o mesmo e igual a  $\alpha_y = \alpha_z = 5,3 \cdot 10^{-7} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Assim, determine:

- o coeficiente de dilatação superficial aproximado no plano  $xy$ .
- o coeficiente de dilatação cúbica aproximado.
- o coeficiente de dilatação superficial aproximado no plano  $yz$ .
- o coeficiente de dilatação superficial aproximado no plano  $xz$ .

#### Comentários:

a) conforme visto em teoria, podemos dizer que o coeficiente de dilatação superficial no plano  $xy$  é dado por:

$$\beta_{xy} = \alpha_x + \alpha_y$$

Substituindo valores, temos:

$$\beta_{xy} = 1,3 \cdot 10^{-6} + 5,3 \cdot 10^{-7} = 1,3 \cdot 10^{-6} + 0,53 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{xy} = 1,83 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

b) o coeficiente de dilatação cúbica (ou volumétrica) é expresso por:

$$\gamma = \alpha_x + \alpha_y + \alpha_z = 1,3 \cdot 10^{-6} + 5,3 \cdot 10^{-7} + 5,3 \cdot 10^{-7}$$

$$\gamma = 1,3 \cdot 10^{-6} + 0,53 \cdot 10^{-6} + 0,53 \cdot 10^{-6}$$

$$\gamma = 2,36 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

c) semelhantemente ao item a, temos que:

$$\beta_{yz} = \alpha_y + \alpha_z = 2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-7}$$

$$\beta_{yz} = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

d) novamente, temos:

$$\beta_{xz} = \alpha_x + \alpha_z$$

$$\beta_{xz} = 1,3 \cdot 10^{-6} + 0,53 \cdot 10^{-6}$$

$$\beta_{xz} = 1,83 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$



## 2.7. A alteração da densidade com a temperatura

Ao aquecermos um sólido, sua massa não varia, mas as dimensões sim. Dessa forma, temos o volume  $V_i$  na temperatura  $\theta_i$  e  $V_f$  na temperatura  $\theta_f$ , que se relacionam pela expressão:

$$V_f = V_i(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

A densidade em cada temperatura é dada por:

$$d_i = \frac{m}{V_i} \text{ e } d_f = \frac{m}{V_f}$$

Relacionando as duas fórmulas de densidade, temos que:

$$d_f = \frac{m}{V_f} = \frac{m}{V_i(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)} = \frac{m}{V_i} \frac{1}{(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)}$$

$$d_f = \frac{d_i}{(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)}$$

Com esse resultado, podemos verificar que a densidade varia de forma oposta ao volume, ou seja, quando aumentamos a temperatura do corpo, sua densidade diminui, dizemos que a densidade e a variação de temperatura são grandezas inversamente proporcionais.

ATENÇÃO  
DECORE!



### 11) (Mackenzie – SP)

A densidade de um sólido é  $10,00 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  a  $100^\circ\text{C}$  e  $10,03 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  a  $32^\circ\text{F}$ . O coeficiente de dilatação linear do sólido é igual a:

- a)  $5 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
- b)  $10 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
- c)  $15 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
- d)  $20 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$
- e)  $30 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

#### Comentários:

Inicialmente, devemos calcular a variação da temperatura em Celsius:

$$\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$$
$$\frac{C}{5} = \frac{32-32}{9}$$





$$C = 0 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Logo:

$$\Delta\theta = 0 - 100 = -100 \text{ } ^\circ\text{C}$$

Então, o coeficiente é de:

$$d_f = \frac{d_i}{1 + \gamma\Delta\theta}$$

$$1 + \gamma\Delta\theta = \frac{d_i}{d_f}$$

$$\gamma\Delta\theta = \frac{d_i - d_f}{d_f}$$

$$\gamma = \frac{d_i - d_f}{\Delta\theta \cdot d_f}$$

$$\gamma = \frac{-0,03}{(-100) \cdot 10,03}$$

$$\gamma = 30 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Como  $\gamma = 3\alpha$ , então:

$$\alpha = 10 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

Alternativa correta b.

## 2.8 Dilatação de um sólido oco

Quando um corpo for oco, ou seja, existe um espaço vazio no interior do sólido. Verifica-se experimentalmente que as paredes do recipiente variam como se fosse um corpo maciço. Tudo se passa como se o espaço interno fosse ocupado totalmente pelo material das paredes.

Assim, um sólido de capacidade volumétrica  $C_i$  a temperatura  $\theta_i$ , cujas paredes são feitas de um material com coeficiente de dilatação volumétrica  $\gamma$ , a sua capacidade passará a ser  $C_f$  quando o conjunto é aquecido até a temperatura  $\theta_f$ , obedecendo a relação:

$$C_f = C_i(1 + \gamma \cdot \Delta\theta)$$

Onde  $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$ .



12)

A  $10 \text{ } ^\circ\text{C}$  uma caneca de alumínio apresenta volume de  $100 \text{ ml}$ . Ela é aquecida até  $50 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Calcule a variação no seu volume, dado que o coeficiente de dilatação linear do alumínio é  $2,2 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

Comentários:



Desenvolvendo a equação da capacidade volumétrica do sólido oco, de modo semelhante ao que fizemos anteriormente, verificamos que:

$$\Delta C = C_i \cdot \gamma \cdot \Delta\theta$$
$$\Delta C = 100 \cdot 3 \cdot 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot (50 - 10)$$

$$\Delta C = 0,264 \text{ ml}$$



### 3. Dilatação dos líquidos

Líquidos aquecidos, em geral, também obedecem a lei da dilatação semelhante aos sólidos. Logo, se o um líquido possui volume inicial  $V_i$  a temperatura  $\theta_i$  e volume final  $V_f$  na temperatura  $\theta_f$ , então, a variação no volume é expressa por:

$$\Delta V = V_i \cdot \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta$$

Onde  $\gamma_{liq}$  é o **coeficiente de dilatação real do líquido**. Como a variação de volume é a diferença entre os dois volumes nas respectivas temperaturas, temos:

$$V_f - V_i = V_i \cdot \gamma_{liq} \Delta\theta$$

$$V_f = V_i(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta)$$

Novamente, o termo  $(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta)$  é chamado de binômio da dilatação real do líquido para o  $\Delta\theta$ .

Como bem sabemos, líquidos não apresentam forma própria. Como consequência disso, sempre que estudamos o comportamento térmico dos líquidos utilizamos um recipiente sólido. Dessa forma, também devemos levar em consideração a dilatação sofrida pelo recipiente.

Geralmente, os líquidos apresentam coeficiente de dilatação maior que dos sólidos. Se um recipiente tiver completamente preenchido por um líquido, ao aquecer o conjunto fatalmente irá transbordar o líquido.



ATENÇÃO  
DECORE!



13)

Um frasco de vidro possui volume de  $540 \text{ cm}^3$  à temperatura de  $20 \text{ }^\circ\text{C}$ . Sabendo que o coeficiente de dilatação volumétrica do vidro é  $27 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e o do mercúrio  $180 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Determine o volume de mercúrio que deve ser colocado no frasco de vidro, de modo que o volume da parte vazia não se altere ao variar a temperatura do sistema.

**Comentários:**

Desejamos saber qual o volume inicial de mercúrio e a condição para que o volume da parte vazia continue sendo a mesma é que a variação sofrida pelo líquido seja a mesma do frasco sólido. Então:

$$\Delta V_{\text{liq}} = \Delta V_{\text{frasco}}$$

$$V_{\text{Merc}} \cdot \gamma_{\text{liq}} \cdot \Delta\theta = V_{\text{frasco}} \cdot \gamma_{\text{vidro}} \cdot \Delta\theta$$

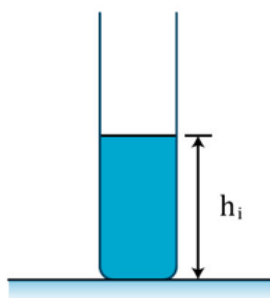
$$V_{\text{merc}} = \frac{\gamma_{\text{vidro}}}{\gamma_{\text{liq}}} V_{\text{frasco}}$$

$$V_{\text{merc}} = \frac{27 \cdot 10^{-6}}{180 \cdot 10^{-6}} 540$$

$$V_{\text{merc}} = 81 \text{ cm}^3$$

14)

Considere um tubo de vidro com formato cilíndrico, colocado na posição vertical e preenchido com mercúrio até a altura  $h_i = 100,0 \text{ cm}$ , a temperatura de  $40 \text{ }^\circ\text{C}$ . Considere que  $\alpha_{\text{vidro}} = 9,0 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e  $\gamma_{\text{mercúrio}} = 180 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Determine a nova altura da coluna de mercúrio, quando o conjunto é aquecido até a temperatura de  $140 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Considere que o tubo de vidro é grande o suficiente para não haver transbordamento.

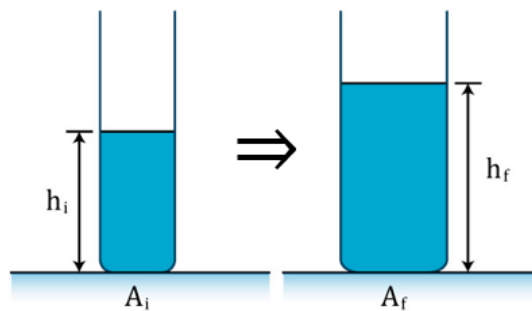


**Comentários:**

Ao aquecer o conjunto, verificamos que a um aumento na temperatura provoca um aumento na área da base do cilindro. Assim, o volume ocupado pelo mercúrio pode ser dado por:

$$V_i = A_i \cdot h_i \text{ e } V_f = A_f \cdot h_f$$





Pela lei da dilatação superficial, temos que:

$$A_f = A_i(1 + 2 \cdot \alpha_{vidro} \cdot \Delta\theta)$$

Por outro lado, a dilatação volumétrica do mercúrio é expressa por:

$$V_f = V_i(1 + \gamma_{mercúrio} \cdot \Delta\theta)$$

Assim, combinando as equações, temos que:

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{A_f \cdot h_f}{A_i \cdot h_i}$$
$$\frac{V_i(1 + \gamma_{mercúrio} \cdot \Delta\theta)}{V_i} = \frac{A_i(1 + 2 \cdot \alpha_{vidro} \cdot \Delta\theta) \cdot h_f}{A_i \cdot h_i}$$

$$h_f = \frac{(1 + \gamma_{mercúrio} \cdot \Delta\theta)}{(1 + 2 \cdot \alpha_{vidro} \cdot \Delta\theta)} h_i$$

Substituindo valores, encontramos que:

$$h_f = \frac{(1 + 180 \cdot 10^{-6} \cdot 100)}{(1 + 2 \cdot 9 \cdot 10^{-6} \cdot 100)} 100$$

$$h_f = 101,6 \text{ cm}$$



### 3.1. Dilatação aparente

Vamos considerar um líquido dentro de um recipiente volumétrico, onde cada divisão tem a capacidade  $C_0$ , na temperatura inicial  $\theta_0$ . Dessa forma, qualquer leitura feita no nosso recipiente é dado por:

$$V_i = L \cdot C_i$$



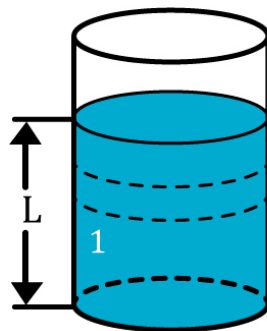


Figura 19: Recipiente e líquido sem sofrer aquecimento.

Quando aquecemos nosso conjunto, uma nova leitura  $L'$  é feita na graduação do recipiente. Se não levarmos em conta a variação na capacidade de cada divisão, teríamos um **volume final aparente do líquido**:

$$V_{ap} = L' \cdot C_i$$

No recipiente, sua capacidade de cada divisão obedece a lei da dilatação da seguinte forma:

$$C_f = C_i(1 + \gamma_R \cdot \Delta\theta)$$

O volume final do líquido pode ser dado por:

$$V_f = L' \cdot C_f$$

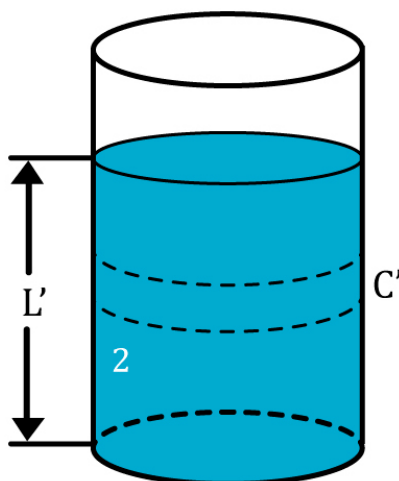


Figura 20: Recipiente e líquido ao sofrer aquecimento.

Substituindo a capacidade final e lembrando que  $V_{ap} = L' \cdot C_i$ , temos que:

$$V_f = L' \cdot C_i(1 + \gamma_R \cdot \Delta\theta)$$

$$V_f = V_{ap}(1 + \gamma_R \cdot \Delta\theta)$$

Por outro lado, o volume final é dado pela lei de dilatação do líquido:

$$V_f = V_i(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta)$$

Portanto:

$$V_{ap}(1 + \gamma_R \cdot \Delta\theta) = V_i(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta)$$

$$V_{ap} = \frac{(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta)}{(1 + \gamma_R \cdot \Delta\theta)} V_i$$



Como os coeficientes são pequenos, podemos usar a aproximação  $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ , assim temos a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}V_{ap} &= V_i(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta) \cdot (1 + \gamma_R \cdot \Delta\theta)^{-1} \\V_{ap} &\cong V_i(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta) \cdot (1 - \gamma_R \cdot \Delta\theta) \\V_{ap} &\cong V_i[1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta - \gamma_R \cdot \Delta\theta + \gamma_{liq} \cdot \gamma_R \cdot (\Delta\theta)^2]\end{aligned}$$

Desconsiderando o termo  $\gamma_{liq} \cdot \gamma_R \cdot (\Delta\theta)^2$ , encontramos que:

$$\begin{aligned}V_{ap} &= V_i[1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta - \gamma_R \cdot \Delta\theta] \\V_{ap} &= V_i[1 + (\gamma_{liq} - \gamma_R)\Delta\theta]\end{aligned}$$

Definindo o coeficiente de dilatação aparente como sendo:

$$\gamma_{ap} = \gamma_{liq} - \gamma_R$$

Finalmente, concluímos que:

$$V_{ap} = V_i(1 + \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta)$$

Chamamos o termo adimensional  $(1 + \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta)$  de binômio de dilatação aparente do líquido para o frasco em que se encontra, para o  $\Delta\theta$ .

Denominamos **dilatação aparente de um líquido**, para um  $\Delta\theta$ , a diferença entre o volume final aparente e o volume inicial:

$$\Delta V_{ap} = V_{ap} - V_i$$

Assim, chegamos à lei da dilatação aparente:

$$\begin{aligned}\Delta V_{ap} &= V_i(1 + \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta) - V_i \\ \Delta V_{ap} &= V_i \cdot \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta\end{aligned}$$

Experimentalmente, o valor do coeficiente de dilatação é facilmente obtido já que  $\Delta V_{ap} = C_i(L' - L)$  e pela lei da dilatação aparente  $\Delta V_{ap} = V_i \cdot \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta$  e a partir daí podemos determinar o  $\gamma_{liq}$ .



15)

Considere um recipiente de vidro graduado em  $ml$ , a  $30^\circ C$ . Coloca-se um líquido desconhecido dentro do recipiente até a marcação de  $500 ml$ , com a temperatura em  $30^\circ C$ . O conjunto é aquecido até a temperatura de  $130^\circ C$  e observa-se que o líquido atingiu a marcação de  $510 ml$ . Dado que o  $\gamma_{vidro} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ C^{-1}$ , determine o  $\gamma_{liq}$  e o volume real do líquido a  $130^\circ C$ .

Comentários:



De acordo com o enunciado, a variação no volume aparente é dada pela diferença entre o volume observado a 130 °C e o volume medido a 30 °C:

$$\Delta V_{ap} = 510 - 500 = 10 \text{ ml}$$

Pela teoria, sabemos que  $\Delta V_{ap}$  é expresso por:

$$\begin{aligned}\Delta V_{ap} &= V_i \cdot \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta \\ 10 &= 500 \cdot \gamma_{ap} \cdot (130 - 30)\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma_{ap} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}$$

Assim, podemos determinar  $\gamma_{liq}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\gamma_{ap} &= \gamma_{liq} - \gamma_R \\ \gamma_{liq} &= \gamma_{ap} + \gamma_R \\ \gamma_{liq} &= 2 \cdot 10^{-4} + 27 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma_{liq} = 227 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}$$

Com o coeficiente de dilatação volumétrica do líquido encontramos o volume real do líquido a 130 °C:

$$\begin{aligned}V_{liq} &= V_i(1 + \gamma_{liq} \cdot \Delta\theta) \\ V_{liq} &= 500(1 + 227 \cdot 10^{-6} \cdot 100)\end{aligned}$$

$$\boxed{V_{liq} = 511,35 \text{ ml}}$$

16)

Considere um frasco de vidro, inicialmente a 10 °C, com um volume de 400 ml, completamente cheio de um líquido desconhecido. O conjunto é aquecido até a temperatura de 60 °C e observa-se que a derramamento de 8 ml do líquido. Dado que o  $\gamma_{vidro} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ , determine o coeficiente de dilatação aparente do líquido e o coeficiente de dilatação real do líquido.

**Comentários:**

Observe que o volume derramado (que transborda) é aproximadamente igual à variação aparente do volume do líquido:

$$\begin{aligned}\Delta V_{ap} &= 8 \text{ ml} = V_i \cdot \gamma_{ap} \cdot \Delta\theta \\ \gamma_{ap} &= \frac{8}{400 \cdot (60 - 10)} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}\end{aligned}$$

Logo, o  $\gamma_{liq}$  é dado por:

$$\begin{aligned}\gamma_{ap} &= \gamma_{liq} - \gamma_R \\ \gamma_{liq} &= \gamma_R + \gamma_{ap} \\ \gamma_{liq} &= 27 \cdot 10^{-6} + 4 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$



$$\gamma_{liq} = 427 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$



### 3.2. Comportamento anômalo da água

Devido ao fato de as moléculas de água no estado líquido estarem ligadas por pontes de hidrogênio, a água apresenta um comportamento anômalo quando aquecida de  $0\text{ }^\circ\text{C}$  a  $4\text{ }^\circ\text{C}$ .

Experimentalmente, verificamos que ao aquecer uma dada massa de água de  $0\text{ }^\circ\text{C}$  a  $4\text{ }^\circ\text{C}$ , o volume diminui. Se manter o aquecimento, para temperaturas acima de  $4\text{ }^\circ\text{C}$ , o volume aumenta, conforme a dilatação normal dos líquidos. Nota-se no laboratório que a água atinge seu valor mínimo na temperatura de  $4\text{ }^\circ\text{C}$ .

Podemos esboçar a variação do volume da água em função da temperatura conforme o gráfico abaixo:

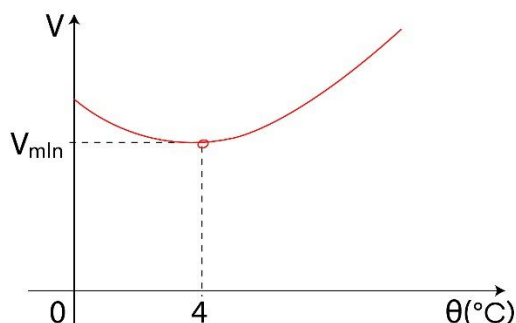


Figura 21: Gráfico do volume da água em função da temperatura na região entre  $0$  e  $4\text{ }^\circ\text{C}$ .

Como notamos no gráfico do volume pela temperatura, não podemos dizer que a variação do volume da água obedece a nossa lei linear conforme visto para os outros líquidos em geral.

Para explicar esse fenômeno, vamos lembrar das formas como a água se compacta nos diferentes estados físicos:





## ESTADOS FÍSICOS DA ÁGUA

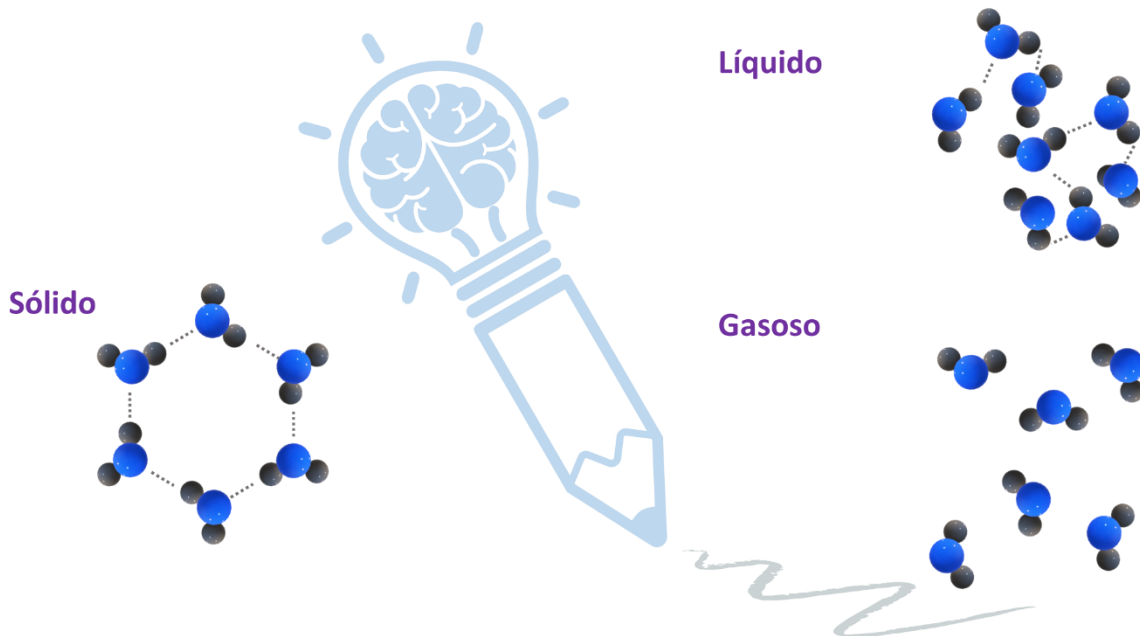


Figura 22: Estados físicos da água.

Quando a água vai de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , estamos tirando a água do seu estado sólido para o estado líquido, fornecendo energia ao sistema. Note que no estado sólido, devido aos dipolos elétricos da molécula, é formado uma estrutura hexagonal que possui um espaço vazio no seu interior, que garante um maior volume da estrutura.

Ao passar para o estado líquido, esse espaço vazio é eliminado e, com isso, o volume diminui. Esse efeito predomina até a temperatura de  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a partir daí o afastamento intermolecular é predominante e, por isso, há dilatação.

Assim, a densidade ( $d = m/V$ ) aumenta de  $0^{\circ}\text{C}$  a  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$  e diminui acima de  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , conforme o gráfico da figura abaixo:

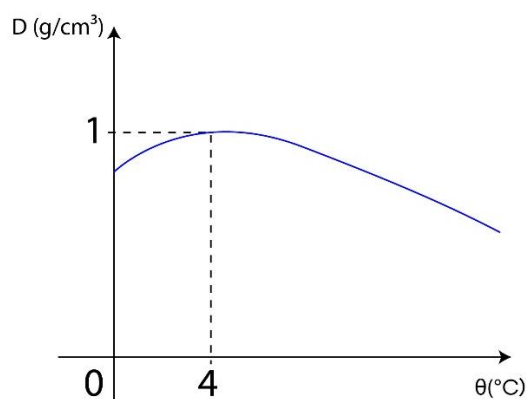


Figura 23: Gráfico da densidade da água em função da temperatura na região entre 0 e  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

A densidade da água apresenta seu valor máximo ( $1\text{ g/cm}^3$ ) na temperatura de  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Em regiões muito frias, onde a temperatura está constantemente abaixo de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , verifica-se que os lagos, mares e rios congelam apenas na superfície, de forma que a água no fundo permanece no estado líquido devido ao comportamento anômalo da água.



Figura 24: Lago congelado.

Se a temperatura ambiente, acima da superfície da água no lago, for superior a  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$  e começa a diminuir, o resfriamento do líquido, como um todo, é praticamente uniforme, pois a densidade da água na superfície (região mais fria) é maior que a da água do fundo (região mais quente). Assim, ocorre uma troca de posição entre as moléculas, o que faz com que a água se misture.

Quando a temperatura atinge  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ , cessa a movimentação por diferença de densidade, já que nessa temperatura a água tem densidade máxima. Uma vez que a temperatura ambiente continue diminuindo, somente a água da superfície se esfria (vale lembrar que os líquidos são maus condutores térmicos). Com isso, forma-se uma camada de gelo, que adquire certa espessura à medida que a temperatura diminui. Entretanto, a água no fundo do lago permanece no estado líquido, preservando a fauna e a flora aquática.

### 3.3. Dilatação dos gases

Como veremos futuramente na Termodinâmica, em gases ideais, as partículas apenas trocam forças devido às colisões. Como consequência, despreza-se qualquer interação de campo entre elas.

Assim, verifica-se que a distância média entre as partículas é função exclusivamente da temperatura e não depende da natureza do gás.

Diante dessas duas condições, podemos dizer que gases com comportamento perto da idealidade, com mesmo volumes iniciais, quando submetidos a mesma variação de temperatura (não alterando a pressão do sistema), apresentarão o mesmo volume final.

Experimentalmente, verifica-se que um gás ideal apresenta coeficiente de dilatação volumétrica próximo de:

$$\gamma_{\text{gás}} = 3,66 \cdot 10^{-3} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1} \approx \frac{1}{273} \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$$

Quando analisamos diversos gases ideais, com diferentes volumes iniciais, ao manter a pressão constante, vemos que seus volumes em função da temperatura (na escala absoluta, geralmente em kelvin) seguem o gráfico abaixo:

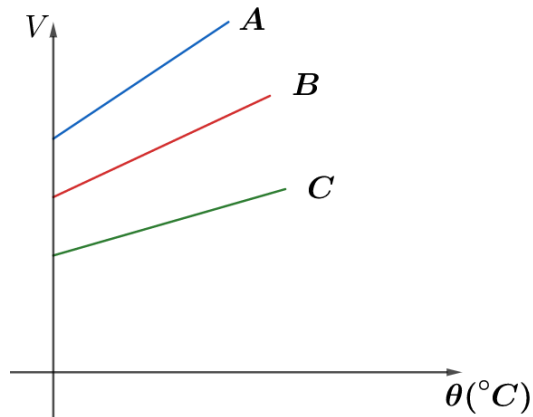


Figura 25: Volumes de gases ideais em função da temperatura.

Se extrapolarmos as retas de cada gás até o zero absoluto, verificaremos volumes de gases nulos. Podemos dizer que a eliminação dos espaços vazios entre as partículas do gás implicaria cessar qualquer agitação térmica. Podemos calcular essa temperatura de convergência da seguinte forma:

$$V_f = V_i [1 + \gamma_{gás} \cdot (\theta_f - 0)]$$

$$0 = V_i (1 + \gamma_{gás} \cdot \theta_f)$$

$$\theta_f = -\frac{1}{\gamma_{gás}}$$

$$\theta_f = -\frac{1}{3,66 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}}$$

$$\boxed{\theta_f \cong -273 \text{ } ^\circ\text{C}}$$

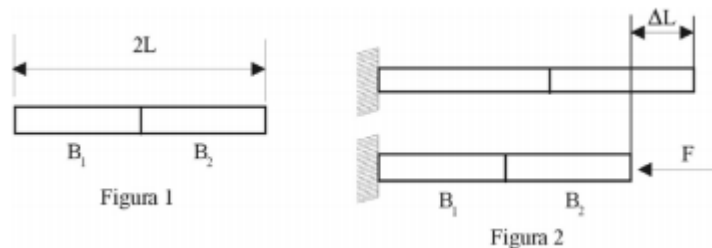
Como já sabemos, essa temperatura corresponde ao zero absoluto. De acordo com o modelo clássico, toda agitação térmica deve desaparecer nessa temperatura, mas vale lembrar que ainda poderiam restar energias de vibração ou de rotação.



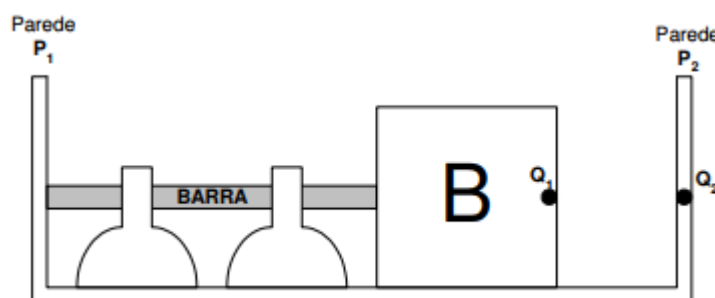
## 4. Lista de questões

### 1. (IME – 2002)

Duas barras  $B_1$  e  $B_2$  de mesmo comprimento  $L$  e de coeficientes de dilatação térmica linear  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, são dispostos conforme ilustra a figura 1. Submete-se o conjunto a uma diferença de temperatura  $\Delta T$  e então, nas barras aquecidas, aplica-se uma força constante que faz com que a soma de seus comprimentos volte a ser  $2L$ . Considerando que o trabalho aplicado sobre o sistema pode ser dado por  $W = F\Delta L$ , onde  $\Delta L$  é a variação total de comprimento do conjunto, conforme ilustra a figura 2, e que  $\alpha_1 = 1,5\alpha_2$ , determine o percentual desse trabalho absorvido pela barra de maior coeficiente de dilatação térmica.



### 2. (IME – 2008)



A figura apresenta uma barra metálica de comprimento  $L = 12\text{ m}$ , inicialmente na temperatura de  $20\text{ }^\circ\text{C}$ , exatamente inserida entre a parede  $P_1$  e o bloco B feito de um material isolante térmico e elétrico. Na face direita do bloco B está engastada uma carga  $Q_1$  afastada  $20\text{ cm}$  da carga  $Q_2$ , engastada na parede  $P_2$ . Entre as duas cargas existe uma força elétrica de  $F_1$  newtons. Substituiu-se a carga  $Q_2$  por uma carga  $Q_3 = 2Q_2$  e aquece-se a barra até a temperatura de  $270\text{ }^\circ\text{C}$ . Devido a esse aquecimento, a barra sofre uma dilatação linear que



provoca o deslocamento do bloco para a direita. Nesse instante a força elétrica entre as cargas é  $F_2 = 32F_1$ .

Considerando que as dimensões do bloco não sofrem alterações e que não exista qualquer força elétrica entre as cargas e a barra, o coeficiente de dilatação térmica linear da barra, em  $^{\circ}\text{C}^{-1}$ , é

- A)  $2,0 \times 10^{-5}$
- B)  $3,0 \times 10^{-5}$
- C)  $4,0 \times 10^{-5}$
- D)  $5,0 \times 10^{-5}$
- E)  $6,0 \times 10^{-5}$

### 3. (ITA-1983)

Ao tomar a temperatura de um paciente, um médico só dispunha de um termômetro graduado em graus Fahrenheit. Para se precaver, ele fez alguns cálculos e marcou no termômetro a temperatura correspondente a  $42^{\circ}\text{C}$  (temperatura crítica do corpo humano). Em que posição da escala do seu termômetro ele marcou essa temperatura?

- a) 106,2.
- b) 107,6.
- c) 102,6.
- d) 180,0.
- e) 104,4.

### 4. (ITA-1989)

Um pesquisador achou conveniente construir uma escala termométrica (escala P) baseada nas temperaturas de fusão e ebulição do álcool etílico, tomadas respectivamente como zero e cem da sua escala. Acontece que, na escala Celsius, aqueles dois pontos extremos da escala do pesquisador têm valores  $-118^{\circ}\text{C}$  e  $78^{\circ}\text{C}$ . Ao usar o seu termômetro para medir a temperatura de uma pessoa com febre, o pesquisador encontrou  $80^{\circ}\text{P}$ . Calcule a temperatura da pessoa doente em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ).

### 5. (ITA-1990)

A Escala Absoluta de Temperaturas é:

- a) construída atribuindo-se o valor de  $273,16\text{ K}$  à temperatura de fusão do gelo e  $373,16\text{ K}$  à temperatura de ebulição da água.
- b) construída escolhendo-se o valor  $-273,15^{\circ}\text{C}$  para o zero absoluto.
- c) construída tendo como ponto fixo o "ponto triplo" da água.



- d) construída tendo como ponto fixo o zero absoluto.
- e) de importância apenas histórica, pois só mede a temperatura de gases.

### 6. (ITA-1995)

O verão de 1994 foi particularmente quente nos Estados Unidos da América. A diferença entre a máxima e a mínima temperatura do verão e a mínima temperatura do inverno anterior foi  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Qual o valor desta diferença na escala Fahrenheit?

- a)  $108\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- b)  $60\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- c)  $140\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- d)  $33\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- e)  $92\text{ }^{\circ}\text{F}$ .

### 7.

Um pesquisador, ao realizar a leitura da temperatura de um determinado sistema, obteve o valor  $-450$ . Considerando as escalas usuais (Celsius, Fahrenheit e Kelvin), podemos afirmar que o termômetro utilizado certamente não poderia estar graduado:

- A) apenas na escala Celsius.
- B) apenas na escala Fahrenheit.
- C) apenas na escala Kelvin.
- D) nas escalas Celsius e Kelvin.
- E) nas escalas Fahrenheit e Kelvin.

### 8.

Um termômetro de mercúrio é graduado nas escalas Celsius e Fahrenheit. A distância entre duas marcas consecutivas (5 e 6 por exemplo) na graduação de Fahrenheit é  $1\text{ mm}$ . A distância, em mm, entre duas marcas consecutivas na graduação Celsius é de:

- a) 0,90
- b) 1,20
- c) 1,50
- d) 1,80
- e) 2,10

### 9. (Mackenzie – SP)



Em dois termômetros distintos, a escala termométrica utilizada é a Celsius, porém um deles está com defeito. Enquanto o termômetro A assinala  $74\text{ }^{\circ}\text{C}$ , o termômetro B assinala  $70\text{ }^{\circ}\text{C}$  e quando o termômetro A assinala  $22\text{ }^{\circ}\text{C}$ , o B assinala  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Apesar disso, ambos possuem uma temperatura em que o valor medido é idêntico. Este valor corresponde, na escala Kelvin, a:

- a)  $293\text{ K}$
- b)  $273\text{ K}$
- c)  $253\text{ K}$
- d)  $243\text{ K}$
- e)  $223\text{ K}$

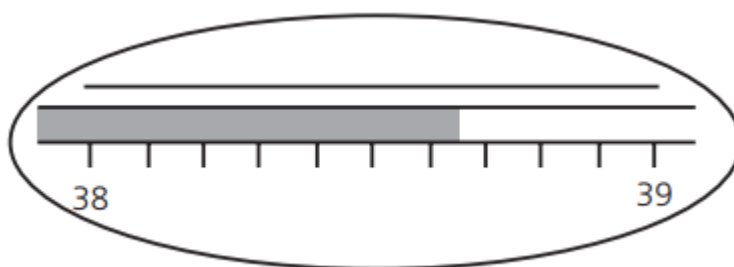
### 10. (PUC – SP)

Dois termômetros, um Celsius correto e um Fahrenheit incorreto, são colocados dentro de um mesmo líquido. Se o termômetro Celsius acusar  $40\text{ }^{\circ}\text{C}$  e o Fahrenheit  $109,2\text{ }^{\circ}\text{F}$ , o erro percentual cometido na medida pelo termômetro Fahrenheit será de:

- a)  $5,0\%$
- b)  $5,2\%$
- c)  $8,4\%$
- d)  $72\%$
- e)  $104\%$

### 11.

Na medida de temperatura de uma pessoa por meio de um termômetro clínico, observou-se que o nível de mercúrio estacionou na região entre  $38\text{ }^{\circ}\text{C}$  e  $39\text{ }^{\circ}\text{C}$  da escala, como está ilustrado na figura.



Após a leitura da temperatura, o médico necessita do valor transformado para uma nova escala, definida por  $t_x = \frac{2t_c}{3}$  e em unidades  $^{\circ}\text{X}$ , onde  $t_c$  é a temperatura na escala Celsius. Lembrando de seus conhecimentos sobre Algarismos Significativos, ele conclui que o valor mais apropriado para a

temperatura  $t_x$  é:

- a)  $25,7\text{ }^{\circ}\text{X}$

- b)  $25,7667 \text{ }^\circ\text{X}$
- c)  $25,766 \text{ }^\circ\text{X}$
- d)  $25,77 \text{ }^\circ\text{X}$
- e)  $26 \text{ }^\circ\text{X}$

**12.**

No dia 1º, à 0 h de determinado mês, uma criança deu entrada num hospital com suspeita de meningite. Sua temperatura estava normal ( $36,5 \text{ }^\circ\text{C}$ ). A partir do dia 1º, a temperatura dessa criança foi plotada num gráfico por meio de um aparelho registrador contínuo. Esses dados caíram nas mãos de um estudante de Física, que verificou a relação existente entre a variação de temperatura ( $\Delta\theta$ ), em graus Celsius, e o dia ( $t$ ) do mês. O estudante encontrou a seguinte equação:

$$\Delta\theta = -0,20t^2 + 2,4t - 2,2$$

A partir dessa equação, analise as afirmações dadas a seguir e indique a correta.

- A) A maior temperatura que essa criança atingiu foi  $40,5 \text{ }^\circ\text{C}$ .
- B) A maior temperatura dessa criança foi atingida no dia 6.
- C) Sua temperatura voltou ao valor  $36,5 \text{ }^\circ\text{C}$  no dia 12.
- D) Entre os dias 3 e 8 sua temperatura sempre aumentou.
- E) Se temperaturas acima de  $43 \text{ }^\circ\text{C}$  causam transformações bioquímicas irreversíveis, então essa criança ficou com problemas cerebrais.

**13.**

A relação entre uma certa escala termométrica  $A$  e a escala Celsius é  $A = C + 3$  e entre uma escala termométrica  $B$  e a escala Fahrenheit é  $B = 2F - 10$ . Qual a relação entre as escalas  $A$  e  $B$ ?

- a)  $A = \frac{5}{18}B - 12$
- b)  $A = \frac{5}{18}B + 12$
- c)  $A = \frac{5}{18}B - 18$
- d)  $A = \frac{5}{18}B + 18$
- e) N.R.A.

**14.**

Por que é melhor um bulbo de um termômetro ter formato cilíndrico em vez do formato esférico?





**15.**

Um termopar é formado de dois metais diferentes, ligados em dois pontos de tal modo que uma pequena voltagem é produzida quando as duas junções estão em diferentes temperaturas. Num termopar específico ferro-constantan, com uma junção mantida a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , a voltagem externa varia linearmente de 0 a  $28\text{ mV}$ , à medida que a temperatura de outra junção é elevada de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  até  $510\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Encontre a temperatura da junção variável quando o termopar gerar  $10,2\text{ mV}$ .

- a)  $76\text{ }^{\circ}\text{C}$
- b)  $86,2\text{ }^{\circ}\text{C}$
- c)  $106,1\text{ }^{\circ}\text{C}$
- d)  $186\text{ }^{\circ}\text{C}$
- e)  $226\text{ }^{\circ}\text{C}$

**16.**

Uma escala termométrica logarítmica relaciona a altura  $h$  de uma coluna de mercúrio Fahrenheit pela relação  $T = a + \log(bh)$ . Na calibração do termômetro para  $h_1 = 2,5\text{ cm}$ , obteve-se  $T_1 = 4\text{ }^{\circ}\text{F}$  e para  $h_2 = 25\text{ cm}$  obteve-se  $T_2 = 5\text{ }^{\circ}\text{F}$ .

- a) Determine as constantes  $a$  e  $b$ .
- b) Qual será a temperatura de um corpo que, quando em equilíbrio térmico com o termômetro, fornece  $h = 2,5\text{ m}$ ?

**17.**

Mergulham-se dois termômetros na água: um graduado na escala Celsius e outro na Fahrenheit. Depois do equilíbrio térmico, nota-se que a diferença entre as leituras nos dois termômetros é 172. Então, a temperatura da água em graus Celsius e Fahrenheit, respectivamente, é:

- a) 32 e 204
- b) 32 e 236
- c) 175 e 347
- d) 175 e 257

**18.**

Sobre os conceitos básicos da Termologia, considere as afirmativas abaixo:

- I. A temperatura é uma grandeza microscópica que avalia o grau de agitação de moléculas de um corpo;



- II. Comparando-se as sensações fisiológicas de “quente” e “frio” ao se tocar dois corpos distintos, é possível dizer com precisão qual deles está a maior temperatura;
- III. Dois corpos que estão a uma mesma temperatura têm a mesma energia interna;
- IV. Dois corpos de mesma massa, que estejam a uma mesma temperatura, têm a mesma energia interna;
- V. Quando um corpo é colocado “em contato” com a chama do fogo de um fogão, recebe calor e, portanto, sua temperatura aumenta;
- VI. Uma panela com água a  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  está quatro vezes mais quente que outra panela com água a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- VII. Um termômetro é exposto diretamente aos raios solares, portanto ele mede a temperatura do ar;
- VIII. Um termômetro é exposto diretamente aos raios solares, portanto ele mede a temperatura do Sol.

Pode-se afirmar que:

- A) apenas uma delas está correta.
- B) apenas duas delas estão corretas.
- C) apenas três delas estão corretas.
- D) apenas uma delas está errada.
- E) todas estão erradas.

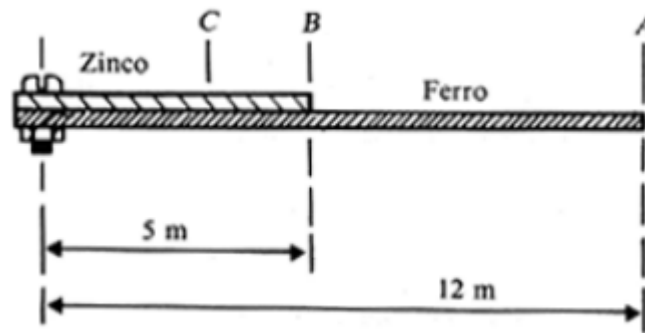
### 19.

É dado um termômetro  $x$  tal que  $60\text{ }^{\circ}\text{X}$  correspondem a  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $20\text{ }^{\circ}\text{X}$  correspondem a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;  $0\text{ }^{\circ}\text{X}$  corresponde a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . As leituras Celsius variam conforme trinômio de segundo grau nas leituras  $X$ . Deduzir a equação que dá leituras Celsius em função de leituras  $X$ .

### 20. (Fuvest-SP)

Dois barras metálicas finas, uma de zinco e outra de ferro, cujos comprimentos, a uma temperatura de  $300\text{ K}$ , valem  $5,0\text{ m}$  e  $12,0\text{ m}$ , respectivamente, são sobrepostas e aparafusadas uma à outra em uma de suas extremidades, conforme ilustra a figura. As outras extremidades B e A das barras de zinco e ferro, respectivamente, permanecem livres. Os coeficientes de dilatação linear do zinco e do ferro valem  $3,0 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$  e  $1,0 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ , respectivamente. Desprezando as espessuras das barras, determine:

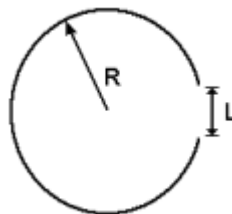




- a) a variação da distância entre as extremidades  $A$  e  $B$  quando as barras são aquecidas até  $400\text{ K}$ ;
- b) a distância até o ponto  $A$ , de um ponto  $C$  da barra de zinco cuja distância ao ponto  $A$  não varia com a temperatura.

### 21. (UFV 1999)

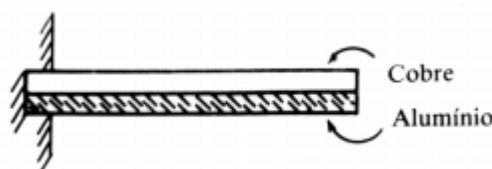
A figura a seguir ilustra um arame rígido de aço, cujas extremidades estão distanciadas de " $L$ ". Alterando-se sua temperatura, de  $293\text{ K}$  para  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , pode-se afirmar que a distância " $L$ ":



- a) diminui, pois o arame aumenta de comprimento, fazendo com que suas extremidades fiquem mais próximas.
- b) diminui, pois o arame contrai com a diminuição da temperatura.
- c) aumenta, pois o arame diminui de comprimento, fazendo com que suas extremidades fiquem mais afastadas.
- d) não varia, pois, a dilatação linear do arame é compensada pelo aumento do raio " $R$ ".
- e) aumenta, pois, a área do círculo de raio " $R$ " aumenta com a temperatura.

### 22. (VUNESP)

A lâmina bimetálica da figura abaixo é feita de cobre ( $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) e de alumínio ( $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). Uma das partes não pode deslizar sobre a outra e o sistema está engastado numa parede.



Se na temperatura ambiente ( $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) ela é horizontal, a afirmativa correta sobre o comportamento da lâmina ( $\alpha$  é o coeficiente de dilatação linear) é:

- a) Sempre se curva para baixo quando muda a temperatura.
- b) Sempre se curva para cima quando muda a temperatura.
- c) Se curva para baixo se  $t < 27\text{ }^{\circ}\text{C}$  e para cima se  $t > 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- d) Se curva para cima se  $t < 27\text{ }^{\circ}\text{C}$  e para baixo se  $t > 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- e) Somente se curva se  $t < 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### 23. (ITA-1969)

Um anel de cobre a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  tem um diâmetro interno de 5,00 centímetros. Qual das opções abaixo corresponderá ao diâmetro interno deste mesmo anel a  $275\text{ }^{\circ}\text{C}$ , admitindo-se que o coeficiente de dilatação térmica do cobre no intervalo de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $300\text{ }^{\circ}\text{C}$  é constante e igual a  $1,60 \cdot 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

- a) 4,98 cm.
- b) 5,00 cm.
- c) 5,02 cm.
- d) 5,20 cm.
- e) nenhuma das respostas acima.

### 24. (ITA-1970)

O vidro Pyrex apresenta maior resistência ao choque térmico do que o vidro comum porque:

- a) possui alto coeficiente de rigidez.
- b) tem baixo coeficiente de dilatação térmica.
- c) tem alto coeficiente de dilatação térmica.
- d) tem alto calor específico.
- e) é mais maleável que o vidro comum.

### 25. (ITA-1975)

Uma barra de cobre de  $1,0\text{ m}$  de comprimento, à temperatura de  $24\text{ }^{\circ}\text{C}$ , tem coeficiente de dilatação linear  $1,7 \cdot 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ . Então, a temperatura em que a barra terá um milímetro a menos de comprimento será:

- a)  $-31\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- b)  $-59\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- c)  $95\text{ }^{\circ}\text{F}$ .



- d)  $162,5^{\circ}F$ .
- e) nenhuma das respostas anteriores.

**26. (ITA-1980)**

Uma placa metálica tem um orifício circular de  $50\text{ mm}$  de diâmetro a  $15^{\circ}C$ . A que temperatura deve ser aquecida a placa para que se possa ajustar ao orifício de um cilindro de  $50,3\text{ mm}$  de diâmetro? O coeficiente de dilatação linear do metal é  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$  por kelvin.

- a)  $520\text{ K}$ .
- b)  $300^{\circ}C$ .
- c)  $300\text{ K}$ .
- d)  $520^{\circ}C$ .
- e)  $200^{\circ}C$ .

**27. (ITA-1989)**

Um anel de cobre, a  $25^{\circ}C$ , tem um diâmetro interno de  $5,00\text{ cm}$ . Qual das opções abaixo corresponderá ao diâmetro interno desse mesmo anel a  $275^{\circ}C$ , admitindo-se que o coeficiente de dilatação linear do cobre, no intervalo  $0^{\circ}C$  a  $300^{\circ}C$ , é constante e igual a  $1,60 \cdot 10^{-5}\text{ }^{\circ}C^{-1}$ ?

- a)  $4,98\text{ cm}$ .
- b)  $5,00\text{ cm}$ .
- c)  $5,02\text{ cm}$ .
- d)  $5,08\text{ cm}$ .
- e)  $5,12\text{ cm}$ .

**28. (ITA-1994)**

Um bulbo de vidro cujo coeficiente de dilatação linear é  $3 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}C^{-1}$  está ligado a um capilar do mesmo material. A temperatura de  $-10,0^{\circ}C$  a área da secção do capilar é  $3,0 \cdot 10^{-4}\text{ cm}^2$  e todo o mercúrio cujo coeficiente de dilatação volumétrica é  $180 \cdot 10^{-6}\text{ }^{\circ}C^{-1}$  ocupa o volume total do bulbo, que a esta temperatura é  $0,500\text{ cm}^3$ . O comprimento da coluna de mercúrio a  $90,0^{\circ}C$  será:

- a)  $270\text{ mm}$ .
- b)  $540\text{ mm}$ .
- c)  $285\text{ mm}$ .
- d)  $300\text{ mm}$ .
- e)  $257\text{ mm}$ .



### 29. (ITA-1995)

Você é convidado a projetar uma ponte metálica, cujo comprimento será  $2,0 \text{ km}$ . Considerando os efeitos de contração e dilatação térmica para temperaturas no intervalo de  $-40^\circ\text{F}$  a  $110^\circ\text{F}$  e o coeficiente de dilatação linear do metal que é de  $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , qual a máxima variação esperada no comprimento da ponte? (O coeficiente de dilatação linear é constante no intervalo de temperatura considerado).

- a)  $9,3 \text{ m}$ .
- b)  $2,0 \text{ m}$ .
- c)  $3,0 \text{ m}$ .
- d)  $0,93 \text{ m}$ .
- e)  $6,5 \text{ m}$ .

### 30. (ITA 1995)

Se duas barras, uma de alumínio com comprimento  $L_1$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha_1 = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e outra de aço com comprimento  $L_2 > L_1$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha_2 = 1,10 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  apresentam uma diferença em seus comprimentos a  $0^\circ\text{C}$ , de  $1000 \text{ mm}$  e esta diferença se mantém constante com a variação da temperatura, podemos concluir que os comprimentos  $L_1$  e  $L_2$  são a  $0^\circ\text{C}$ :

- a)  $L_1 = 91,7 \text{ mm}$   $L_2 = 1091,7 \text{ mm}$
- b)  $L_1 = 67,6 \text{ mm}$   $L_2 = 1067,6 \text{ mm}$
- c)  $L_1 = 917 \text{ mm}$   $L_2 = 1917 \text{ mm}$
- d)  $L_1 = 676 \text{ mm}$   $L_2 = 1676 \text{ mm}$
- e)  $L_1 = 323 \text{ mm}$   $L_2 = 1323 \text{ mm}$

### 31. (ITA-1997)

Um certo volume de mercúrio, cujo coeficiente de dilatação volumétrica é  $\gamma_m$ , é introduzido num vaso de volume  $V_0$ , feito de vidro de coeficiente de dilatação volumétrica  $\gamma_V$ . O vaso com mercúrio, inicialmente a  $0^\circ\text{C}$ , é aquecido a uma temperatura  $T$  (em  $^\circ\text{C}$ ). O volume da parte vazia do vaso à temperatura  $T$  é igual à parte vazia do mesmo a  $0^\circ\text{C}$ . O volume de mercúrio introduzido no vaso a  $0^\circ\text{C}$  é:

- a)  $\left(\frac{\gamma_V}{\gamma_m}\right) V_0$
- b)  $\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_V}\right) V_0$
- c)  $\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_V}\right) \cdot \left[\frac{273}{T + 273}\right] \cdot V_0$
- d)  $\left(1 - \left(\frac{\gamma_V}{\gamma_m}\right)\right) V_0$



e)  $\left(1 - \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_V}\right)\right) V_0$

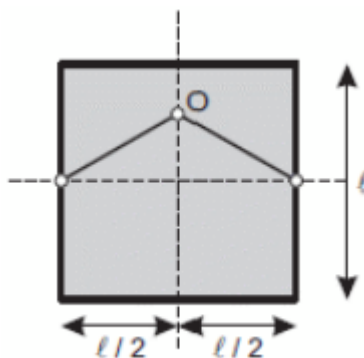
### 32. (ITA-2002)

Um pequeno tanque, completamente preenchido com 20,0 L de gasolina a  $0^\circ F$ , é logo a seguir transferido para uma garagem mantida à temperatura de  $70^\circ F$ . Sendo  $\gamma = 0,0012^\circ C^{-1}$  o coeficiente de expansão volumétrica da gasolina, a alternativa que melhor expressa o volume de gasolina que vazará em consequência do seu aquecimento até a temperatura da garagem é:

- a) 0,507 L.
- b) 0,940 L.
- c) 1,68 L.
- d) 5,07 L.
- e) 0,17 L.

### 33. (ITA-2010)

Um quadro quadrado de lado  $l$  e massa  $m$ , feito de um material de coeficiente de dilatação superficial  $\beta$ , é pendurado no pino O por uma corda inextensível, de massa desprezível, com as extremidades fixadas no meio das arestas laterais do quadro, conforme a figura. A força de tração máxima que a corda pode suportar é  $F$ . A seguir, o quadro é submetido a uma variação de temperatura  $\Delta T$ , dilatando. Considerando desprezível a variação no comprimento da corda devida à dilatação, podemos afirmar que o comprimento mínimo da corda para que o quadro possa ser pendurado com segurança é dado por:



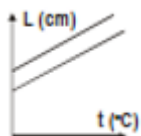
- a)  $2lF\sqrt{\beta\Delta T}/mg$
- b)  $2lF(1 + \beta\Delta T)/mg$
- c)  $2lF(1 + \beta\Delta T)/\sqrt{4F^2 - m^2g^2}$
- d)  $2lF\sqrt{(1 + \beta\Delta T)}/(2F - mg)$
- e)  $2lF\sqrt{(1 + \beta\Delta T)}/(4F^2 - m^2g^2)$



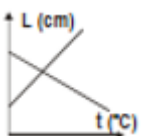
### 34. (OBF – 2005)

Duas barras metálicas, de comprimentos diferentes e coeficientes de dilatação iguais, são aquecidas e, a partir dos valores medidos para que o comprimento e a temperatura, foi elaborado um gráfico. A figura que melhor representa o gráfico obtido é:

a)



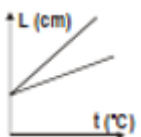
b)



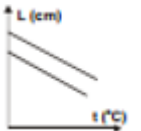
c)



d)

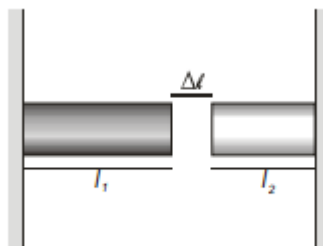


e)



### 35. (OBF – 2007)

Considere duas barras delgadas, de comprimento  $l_1$  e  $l_2$ , feitas de materiais cujos coeficientes de dilatação linear são, respectivamente,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . As barras estão dispostas de modo a estarem separadas por uma distância  $\Delta l$ , conforme mostra a figura abaixo.





A que variação de temperatura deve ser submetido o sistema para que o espaçamento  $\Delta l$ , entre as duas barras, seja completamente preenchido? Considere que apenas as barras sofrem influência desta variação de temperatura.

### 36. (OBF – 2007)

A conhecida fórmula de dilatação térmica, na qual o comprimento de uma barra varia linearmente com a temperatura só é exata se a variação de temperatura não for grande. Para grandes variações de temperatura esta fórmula perde precisão e pode levar a erros grosseiros. Contudo, podemos, mesmo assim, utilizar esta fórmula para grandes variações se admitirmos que o coeficiente de dilatação térmica varie com a temperatura, ou melhor, que este coeficiente permaneça constante em uma determinada faixa de temperatura e tome outro valor em outra faixa. Suponha que uma barra, construída com material cujo coeficiente de dilatação  $\alpha$  varie com a temperatura como mostrado na figura 7, tenha comprimento  $L_0$  à temperatura  $T_0$ .

- Qual o comprimento da barra na temperatura  $T_4$ ?
- Se, ao invés do procedimento anterior, admitirmos que o valor  $\alpha$  é o mesmo para todas as temperaturas (e igual ao valor médio dos coeficientes de temperatura apresentados no gráfico) qual seria o comprimento da barra à temperatura  $T_4$ ?

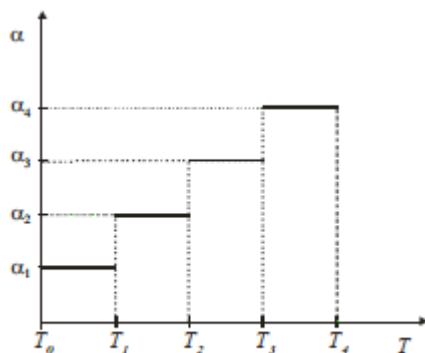


Fig. 7

### 37. (OBF – 2009)

Furos circulares de diâmetros iguais são feitos em duas chapas metálicas que têm as mesmas espessuras e são submetidas a variações iguais de temperatura. Uma das chapas é de cobre (coeficiente de dilatação linear igual a  $2,4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) e a outra, de alumínio (coeficiente de dilatação linear  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). Se depois de aquecidas o furo na chapa de alumínio sofreu uma variação de área igual a 2% relativamente à sua área inicial, a chapa de cobre sofreu uma variação correspondente a:

- 8%
- 2%
- 1%
- 4%

e) 0,5%

### 38. (OBF – 2009)

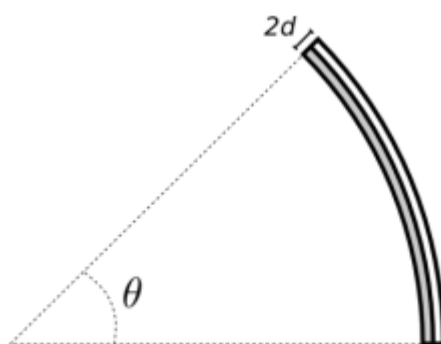
Uma armação cúbica de arestas de comprimento  $L_0$ , feitas com arame cilíndrico muito fino de coeficiente de dilatação linear  $\alpha$ , constante, inicialmente a uma temperatura  $T_0$ , é aquecida a uma temperatura final  $T$ . Admitindo-se que  $\alpha$  e  $(T - T_0)$  possuem ordens de grandeza respectivas de  $10^{-4}$  e  $10^2$ , determine a ordem de grandeza das variações de área das faces e volume do cubo em questão.

### 39. (OBF – 2014)

Um termômetro pode ser feito de um tubo fino de vidro, o capilar, conectado a um pequeno recipiente, o bulbo. O bulbo contém material líquido que se dilata com a temperatura. Em alguns termômetros usa-se o mercúrio líquido como fluido. Quando há troca de calor entre um corpo e o bulbo do termômetro a temperatura do mercúrio, alterando seu volume. Assim, o nível do mercúrio muda ao longo do capilar até que se atinja o equilíbrio térmico. O termômetro clínico, por exemplo, é usado na medição da temperatura do corpo humano e são construídos para medir temperaturas entre  $34^\circ\text{C}$  e  $43^\circ\text{C}$ . Em 2003 o INMETRO (Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia) através de uma portaria proibiu o uso dos termômetros de mercúrio. Em substituição ao mercúrio, alguns termômetros têm sido produzidos usando álcool. O coeficiente de expansão térmica volumétrico do álcool é cerca de 5 vezes maior que o do mercúrio. Considerando que os volumes dos bulbos sejam iguais, qual deve ser a razão entre os diâmetros dos capilares de termômetros clínicos de mercúrio e álcool para que ambos apresentem a mesma escala? Despreze os efeitos da variação de temperatura do vidro

### 40. (OBF – 2016)

Uma tira bimetálica é formada soldando-se duas tiras finas de metais distintos, cada uma delas com largura  $d$ . Na temperatura de referência  $T_0$ , as duas tiras têm o mesmo comprimento  $l_0$ . Quando a temperatura se eleva de  $\Delta T$  as tiras se encurvam como mostra a figura abaixo. Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  os coeficientes de dilatação linear de cada metal, determine o ângulo de encurvamento  $\theta$  em termos de  $\Delta T$ ,  $l_0$ ,  $d$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . O que aconteceria se a tira bimetálica fosse resfriada em relação à sua temperatura de referência?



#### 41. (Saraeva)

Determinar o comprimento de uma régua de ferro e de uma régua de cobre  $l'_0$  e  $l''_0$ , a  $t = 0^\circ\text{C}$ , se a diferença das mesmas para  $t_1 = 50^\circ\text{C}$  e  $t_2 = 450^\circ\text{C}$  são iguais em módulo e iguais a  $\Delta l = 2\text{ cm}$ . O coeficiente de dilatação linear do ferro é  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , do cobre é  $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### 42. (Saraeva)

À temperatura  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , colocam em um balão de vidro  $m_0 = 100\text{ g}$  de mercúrio. Para  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  colocam no balão  $m_1 = 99,7\text{ g}$  de mercúrio. (Em ambos os casos considerar a temperatura do mercúrio igual à temperatura do balão.) Encontrar, por meio desses dados, o coeficiente de dilatação linear do vidro  $\alpha$ , sabendo que o coeficiente de expansão volumétrica do mercúrio é  $\beta_1 = 18 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$

#### 43. (Saraeva)

Um relógio, com pêndulo metálico, adianta  $\tau_1 = 5\text{ s}$  por dia a uma temperatura  $t_1 = +15^\circ\text{C}$  e atrasa  $\tau_2 = 10\text{ s}$  por dia a uma temperatura  $t_2 = 30^\circ\text{C}$ . Encontrar o coeficiente  $\alpha$  de dilatação térmica do metal do pêndulo, considerando, que o período de oscilação do pêndulo é  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ .

#### 44. (Saraeva)

Em uma roda de madeira de diâmetro  $100\text{ cm}$ , é necessário adaptar um anel de ferro, cujo diâmetro é de  $5\text{ mm}$  menor que o diâmetro da roda. Em quantos graus é necessário elevar a temperatura do anel? O coeficiente de dilatação linear do ferro é  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### 45. (Zubov)

A escala de latão de um barômetro de mercúrio está a  $0^\circ\text{C}$ . A  $18^\circ\text{C}$  o barômetro indica uma pressão de  $760\text{ mmHg}$ . Deduza a leitura do barômetro para  $0^\circ\text{C}$ . O coeficiente de dilatação linear do latão é  $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5}$  e o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é  $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ .



## 5. Gabarito

GABARITO



- 1)  $P_1 = 60\%$
- 2) D
- 3) B
- 4)  $38,8\text{ }^\circ\text{C}$
- 5) C
- 6) A
- 7) D
- 8) D
- 9) D
- 10) A
- 11) D
- 12) B
- 13) A
- 14)  $S_{cilindro} > S_{esfera}$
- 15) D
- 16) a) indeterminadas b)  $6\text{ }^\circ\text{F}$
- 17) C
- 18) E
- 19)  $\theta_C = \frac{2}{3}x + \frac{1}{60}x^2$
- 20) a) 9 mm, b) 4 m
- 21) E
- 22) C
- 23) C
- 24) B
- 25) A
- 26) D
- 27) C



28) C

29) B

30) C

31) A

32) B

33) E

34) C

$$35) \Delta\theta = \frac{\Delta l}{l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2}$$

$$36) \text{ a) } L_4 = L_0(1 + \alpha_1(T_1 - T_0))(1 + \alpha_2(T_2 - T_1))(1 + \alpha_3(T_3 - T_2))(1 + \alpha_4(T_4 - T_3)) \quad \text{b) } L = L_0\left(1 + \left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4}\right)(T_4 - T_0)\right)$$

37) D

$$38) 10^{-2}(2L_0), 10^{-2}(3L_0)$$

$$39) \sqrt{5}$$

$$40) \theta = \frac{d}{l_0\Delta T|\alpha_2 - \alpha_1|}, \text{ curvatura se inverte}$$

$$41) 6,8 \text{ cm}; 4,8 \text{ cm}; 2008,5 \text{ cm}; 2006 \text{ cm}$$

$$42) \alpha = 9,82 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$43) \alpha \approx 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

$$44) 418,8 \text{ }^\circ\text{C}$$

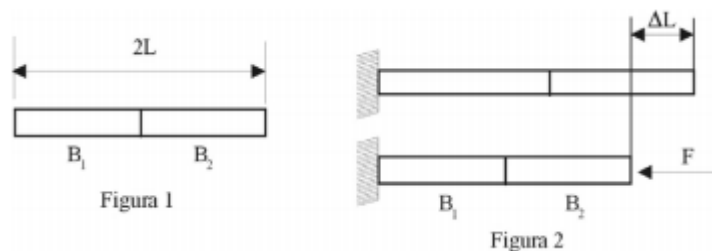
$$45) 761,96 \text{ mm}$$



## 6. Questões resolvidas e comentadas

### 1. IME 2002)

Duas barras  $B_1$  e  $B_2$  de mesmo comprimento  $L$  e de coeficientes de dilatação térmica linear  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ , respectivamente, são dispostos conforme ilustra a figura 1. Submete-se o conjunto a uma diferença de temperatura  $\Delta T$  e então, nas barras aquecidas, aplica-se uma força constante que faz com que a soma de seus comprimentos volte a ser  $2L$ . Considerando que o trabalho aplicado sobre o sistema pode ser dado por  $W = F\Delta L$ , onde  $\Delta L$  é a variação total de comprimento do conjunto, conforme ilustra a figura 2, e que  $\alpha_1 = 1,5\alpha_2$ , determine o percentual desse trabalho absorvido pela barra de maior coeficiente de dilatação térmica.



### Comentários:

Sendo o trabalho proporcional à variação de comprimento, devemos calcular a porcentagem da dilatação relativa à barra de maior coeficiente:

$$\Delta L_1 = L\alpha_1\Delta\theta$$

$$\Delta L_2 = L\alpha_2\Delta\theta$$

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

Queremos a fração da variação devida à barra 1:

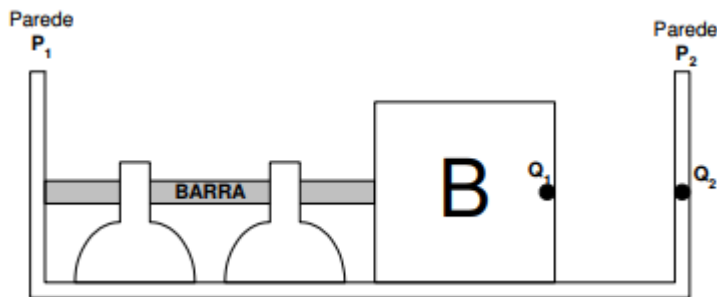
$$f_1 = \frac{\Delta L_1}{\Delta L} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_1}$$

$$f_1 = \frac{1,5}{2,5} = 0,6$$

**Gabarito:**  $P_1 = 60\%$

### 2. (IME – 2008)





A figura apresenta uma barra metálica de comprimento  $L = 12\text{ m}$ , inicialmente na temperatura de  $20\text{ }^\circ\text{C}$ , exatamente inserida entre a parede  $P_1$  e o bloco B feito de um material isolante térmico e elétrico. Na face direita do bloco B está engastada uma carga  $Q_1$  afastada  $20\text{ cm}$  da carga  $Q_2$ , engastada na parede  $P_2$ . Entre as duas cargas existe uma força elétrica de  $F_1$  newtons. Substituiu-se a carga  $Q_2$  por uma carga  $Q_3 = 2Q_2$  e aquece-se a barra até a temperatura de  $270\text{ }^\circ\text{C}$ . Devido a esse aquecimento, a barra sofre uma dilatação linear que provoca o deslocamento do bloco para a direita. Nesse instante a força elétrica entre as cargas é  $F_2 = 32F_1$ .

Considerando que as dimensões do bloco não sofrem alterações e que não exista qualquer força elétrica entre as cargas e a barra, o coeficiente de dilatação térmica linear da barra, em  $^\circ\text{C}^{-1}$ , é

- A)  $2,0 \times 10^{-5}$
- B)  $3,0 \times 10^{-5}$
- C)  $4,0 \times 10^{-5}$
- D)  $5,0 \times 10^{-5}$
- E)  $6,0 \times 10^{-5}$

### Comentários:

Pela Lei de Coulomb temos:

$$F_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$$

Note que essa força é proporcional às cargas e inversamente proporcional à distância ao quadrado entre elas.  $F_2 = 32F_1$  e um fator multiplicado de dois vem da carga  $Q_3 = 2Q_2$  o fator multiplicador de 16 deve vir da distância, sendo essa 4 vezes menor que a inicial:  $5\text{ cm}$

Assim, temos que a variação no comprimento na barra deve ser:

$$\Delta l = 20 - 5 = 15\text{ cm}$$

Usando a expressão que relaciona a variação na temperatura da barra com sua dilatação:

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta \theta$$
$$\alpha = \frac{15 \cdot 10^{-2}}{12 \cdot 250} = 5 \cdot 10^{-5}\text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$



**Gabarito: D.**

---

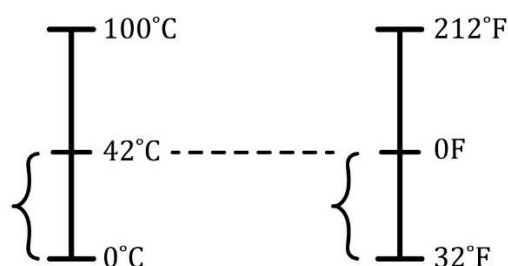
**3. (ITA-1983)**

Ao tomar a temperatura de um paciente, um médico só dispunha de um termômetro graduado em graus Fahrenheit. Para se precaver, ele fez alguns cálculos e marcou no termômetro a temperatura correspondente a  $42^\circ\text{C}$  (temperatura crítica do corpo humano). Em que posição da escala do seu termômetro ele marcou essa temperatura?

- a) 106,2.
- b) 107,6.
- c) 102,6.
- d) 180,0.
- e) 104,4.

**Comentários:**

Lembre-se que a temperatura de fusão da água é  $0^\circ$  na escala Celsius e  $32^\circ$  na escala Fahrenheit e a temperatura de evaporação é  $100^\circ$  e  $212^\circ$  nas escalas Celsius e Fahrenheit, respectivamente. Como esses pontos devem ser equivalentes entre as escalas, temos:



$$\frac{\theta_F - 32}{212 - 32} = \frac{42 - 0}{100 - 0}$$
$$\theta_F = 32 + \frac{9}{5} 42$$
$$\theta_F = 107,6^\circ\text{F}$$

**Gabarito: B.**

---

**4. (ITA-1989)**

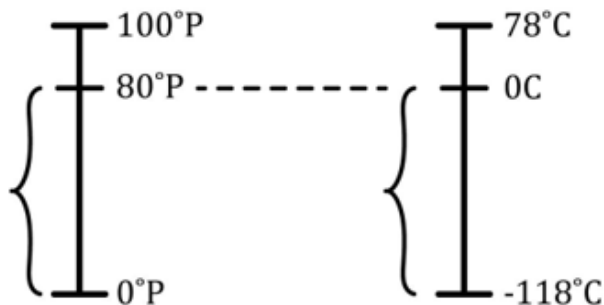
Um pesquisador achou conveniente construir uma escala termométrica (escala P) baseada nas temperaturas de fusão e ebulição do álcool etílico, tomadas respectivamente como zero e cem da sua escala. Acontece que, na escala Celsius, aqueles dois pontos extremos da escala do pesquisador têm valores  $-118^\circ\text{C}$  e  $78^\circ\text{C}$ . Ao usar o seu termômetro para medir a



temperatura de uma pessoa com febre, o pesquisador encontrou  $80^{\circ}P$ . Calcule a temperatura da pessoa doente em graus Celsius ( $^{\circ}C$ ).

**Comentários:**

Fazendo as temperaturas de equivalência:



$$\frac{\theta_C - (-118)}{78 - (-118)} = \frac{80 - 0}{100 - 0}$$
$$\theta_C = \frac{4}{5}196 - 118$$
$$\theta_C = 156,8 - 118 = 38,8^{\circ}C$$

**Gabarito: 38,8 °C.**

**5. (ITA-1990)**

A Escala Absoluta de Temperaturas é:

- a) construída atribuindo-se o valor de  $273,16 K$  à temperatura de fusão do gelo e  $373,16 K$  à temperatura de ebulição da água.
- b) construída escolhendo-se o valor  $-273,15^{\circ}C$  para o zero absoluto.
- c) construída tendo como ponto fixo o "ponto triplo" da água.
- d) construída tendo como ponto fixo o zero absoluto.
- e) de importância apenas histórica, pois só mede a temperatura de gases.

**Comentários:**

Por definição, o Kelvin, unidade de temperatura termodinâmica, é a fração  $1/273,16$  da temperatura termodinâmica do ponto triplo da água.

Temperatura termodinâmica é a medida absoluta da energia interna média total, em contraste com a temperatura que definimos através de comparação.

**Gabarito: C.**



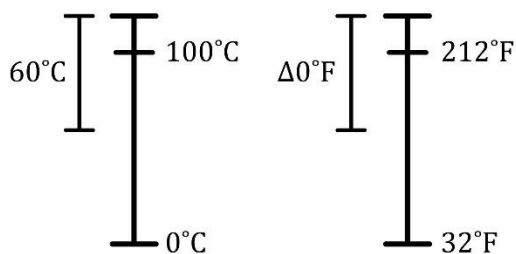
### 6. (ITA-1995)

O verão de 1994 foi particularmente quente nos Estados Unidos da América. A diferença entre a máxima e a mínima temperatura do verão e a mínima temperatura do inverno anterior foi  $60\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Qual o valor desta diferença na escala Fahrenheit?

- a)  $108\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- b)  $60\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- c)  $140\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- d)  $33\text{ }^{\circ}\text{F}$ .
- e)  $92\text{ }^{\circ}\text{F}$ .

#### Comentários:

Lembre-se da relação linear entre as escalas:



$$\frac{\Delta\theta_F}{212 - 32} = \frac{60}{100 - 0}$$
$$\Delta\theta_F = \frac{3}{5} 180 = 108\text{ }^{\circ}\text{F}$$

**Gabarito: A.**

### 7.

Um pesquisador, ao realizar a leitura da temperatura de um determinado sistema, obteve o valor  $-450$ . Considerando as escalas usuais (Celsius, Fahrenheit e Kelvin), podemos afirmar que o termômetro utilizado certamente não poderia estar graduado:

- A) apenas na escala Celsius.
- B) apenas na escala Fahrenheit.
- C) apenas na escala Kelvin.
- D) nas escalas Celsius e Kelvin.
- E) nas escalas Fahrenheit e Kelvin.



### Comentários:

O 0 na escala Kelvin é o zero absoluto, a temperatura na qual todas as moléculas de uma substância estão no *estado fundamental*, **de energia mínima**, ou seja, não há temperatura menor que essa.

Obviamente o termômetro não poderia estar em Kelvin já que não existem temperaturas negativas nessa escala.

Encontraremos a temperatura mínima absoluta em graus Celsius. Usando a equação de transformação entre Kelvin e graus Celsius:

$$\theta_K = \theta_C + 273$$
$$\theta_C(\min) = -273^\circ\text{C}$$

Logo -450 também é impossível em graus Celsius.

Encontraremos a temperatura mínima absoluta em graus Fahrenheit. Usando a equação de transformação entre Kelvin e graus Fahrenheit:

$$\frac{\theta_K - 273}{5} = \frac{\theta_F - 32}{9}$$
$$\theta_F(\min) = -459,4^\circ\text{F} \text{ (possível)}$$

### Gabarito: D

---

#### 8.

Um termômetro de mercúrio é graduado nas escalas Celsius e Fahrenheit. A distância entre duas marcas consecutivas (5 e 6 por exemplo) na graduação de Fahrenheit é 1 mm. A distância, em mm, entre duas marcas consecutivas na graduação Celsius é de:

- a) 0,90
- b) 1,20
- c) 1,50
- d) 1,80
- e) 2,10

### Comentários:

Considere uma variação da temperatura medida no termômetro, independente da escala essa variação deve ter o mesmo comprimento. Seja  $n_F$  e  $n_C$  o número de marcações nas escalas Fahrenheit e Celsius, respectivamente, e  $l_F$ ,  $l_C$  os respectivos comprimentos de cada marcação.

Como os comprimentos devem ser iguais, temos:

$$n_F l_F = n_C l_C \quad (\text{eq. 1})$$

Além disso, identificamos uma medida na escala pelo número de marcações que ela apresenta, logo esse número é proporcional a variação da temperatura em cada escala:



$$\frac{n_F}{\Delta\theta_F} = \frac{n_C}{\Delta\theta_C}$$

Substituindo (1) na equação acima, temos:

$$l_C = \frac{\Delta\theta_F}{\Delta\theta_C} l_F$$

Lembrando da relação entre as variações nessas escalas:

$$\frac{\Delta\theta_C}{5} = \frac{\Delta\theta_F}{9}$$

$$l_C = \frac{9}{5} l_F = 1,8 \text{ mm}$$

**Gabarito: D**

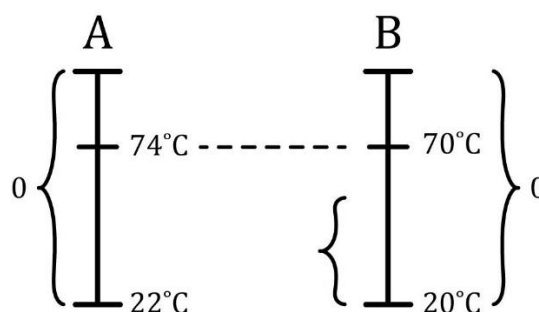
### 9. (Mackenzie – SP)

Em dois termômetros distintos, a escala termométrica utilizada é a Celsius, porém um deles está com defeito. Enquanto o termômetro A assinala  $74^\circ\text{C}$ , o termômetro B assinala  $70^\circ\text{C}$  e quando o termômetro A assinala  $22^\circ\text{C}$ , o B assinala  $20^\circ\text{C}$ . Apesar disso, ambos possuem uma temperatura em que o valor medido é idêntico. Este valor corresponde, na escala Kelvin, a:

- a)  $293 \text{ K}$
- b)  $273 \text{ K}$
- c)  $253 \text{ K}$
- d)  $243 \text{ K}$
- e)  $223 \text{ K}$

#### Comentários:

Considere a representação de equivalência entre medidas:



$$\frac{\theta - 22}{74 - 22} = \frac{\theta - 20}{70 - 20}$$
$$\frac{\theta - 22}{26} = \frac{\theta - 20}{25}$$



$$\theta = 26 \cdot 20 - 22 \cdot 25 = -30 \text{ }^\circ\text{C}$$

Convertendo para a escala Kelvin:

$$\theta_K = \theta_C + 273 = 243 \text{ K}$$

**Gabarito: D**

---

**10. (PUC – SP)**

Dois termômetros, um Celsius correto e um Fahrenheit incorreto, são colocados dentro de um mesmo líquido. Se o termômetro Celsius acusar  $40 \text{ }^\circ\text{C}$  e o Fahrenheit  $109,2 \text{ }^\circ\text{F}$ , o erro percentual cometido na medida pelo termômetro Fahrenheit será de:

- a) 5,0 %
- b) 5,2 %
- c) 8,4 %
- d) 72 %
- e) 104 %

**Comentários:**

A relação entre as medidas na escala Celsius e Fahrenheit é:

$$\frac{\theta_F - 32}{9} = \frac{\theta_C}{5}$$

A medida em graus Celsius está correta, logo fazendo a conversão com a equação acima encontraremos o valor correto da temperatura na escala Fahrenheit:

$$\theta_F = 72 + 32 = 104 \text{ }^\circ\text{F}$$

Assim, o erro percentual é dado por:

$$\delta\theta_F = \frac{109,2 - 104}{104} = 0,05$$

Ou 5%.

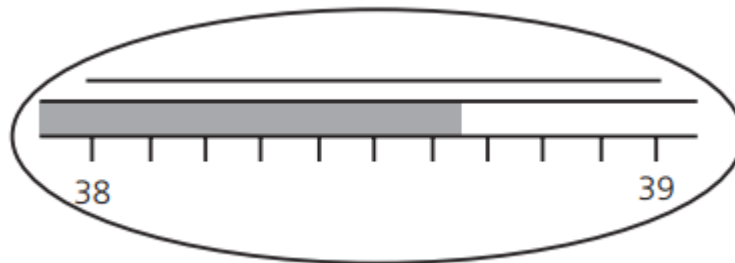
**Gabarito: A**

---

**11.**

Na medida de temperatura de uma pessoa por meio de um termômetro clínico, observou-se que o nível de mercúrio estacionou na região entre  $38 \text{ }^\circ\text{C}$  e  $39 \text{ }^\circ\text{C}$  da escala, como está ilustrado na figura.





Após a leitura da temperatura, o médico necessita do valor transformado para uma nova escala, definida por  $t_X = \frac{2t_C}{3}$  e em unidades  $^{\circ}X$ , onde  $t_C$  é a temperatura na escala Celsius. Lembrando de seus conhecimentos sobre algarismos significativos, ele conclui que o valor mais apropriado para a temperatura  $t_X$  é:

- a)  $25,7^{\circ}X$
- b)  $25,7667^{\circ}X$
- c)  $25,766^{\circ}X$
- d)  $25,77^{\circ}X$
- e)  $26^{\circ}X$

**Comentários:**

A medida de uma grandeza física guarda somente um algarismo duvidoso no fim de seus algarismos significativos. No caso em questão vemos claramente que o valor é algo do tipo  $38,6?$ . Logo, a medida tem 4 algarismos significativos, e a multiplicação por uma constante,  $2/3$ , não altera esse número.

**Gabarito: D**

**12.**

No dia 1º, à 0 h de determinado mês, uma criança deu entrada num hospital com suspeita de meningite. Sua temperatura estava normal ( $36,5^{\circ}C$ ). A partir do dia 1º, a temperatura dessa criança foi plotada num gráfico por meio de um aparelho registrador contínuo. Esses dados caíram nas mãos de um estudante de Física, que verificou a relação existente entre a variação de temperatura ( $\Delta\theta$ ), em graus Celsius, e o dia ( $t$ ) do mês. O estudante encontrou a seguinte equação:

$$\Delta\theta = -0,20t^2 + 2,4t - 2,2$$

A partir dessa equação, analise as afirmações dadas a seguir e indique a correta.

- A) A maior temperatura que essa criança atingiu foi  $40,5^{\circ}C$ .
- B) A maior temperatura dessa criança foi atingida no dia 6.
- C) Sua temperatura voltou ao valor  $36,5^{\circ}C$  no dia 12.



- D) Entre os dias 3 e 8 sua temperatura sempre aumentou.
- E) Se temperaturas acima de  $43\text{ }^{\circ}\text{C}$  causam transformações bioquímicas irreversíveis, então essa criança ficou com problemas cerebrais.

**Comentários:**

A temperatura da criança em um dia arbitrário  $t$  é dada por:

$$\theta(t) = \theta_0 + \Delta\theta(t)$$

Logo a maior temperatura ocorrerá quando  $\Delta\theta(t)$  for máximo também.

A variação acima é uma equação do segundo grau, e seu  $x$  do vértice (abscissa do ponto de máximo) é dado por:

$$t_{max} = -\frac{(-2,4)}{2(0,2)} = \frac{2,4}{2 \cdot 0,2} = 6 \text{ dias}$$

**Gabarito: B.**

---

**13.**

A relação entre uma certa escala termométrica  $A$  e a escala Celsius é  $A = C + 3$  e entre uma escala termométrica  $B$  e a escala Fahrenheit é  $B = 2F - 10$ . Qual a relação entre as escalas  $A$  e  $B$ ?

- a)  $A = \frac{5}{18}B - 12$
- b)  $A = \frac{5}{18}B + 12$
- c)  $A = \frac{5}{18}B - 18$
- d)  $A = \frac{5}{18}B + 18$
- e) N.R.A.

**Comentários:**

Da primeira equação temos:

$$C = A - 3 \quad (eq. 1)$$

Da segunda equação:

$$F = \frac{B + 10}{2} \quad (eq. 2)$$

Lembrando da equação que relaciona as temperaturas em Celsius e Fahrenheit:

$$\frac{F - 32}{9} = \frac{C}{5}$$

Substituindo (1) e (2) na equação acima, temos:



$$\frac{B - 54}{18} = \frac{A - 3}{5}$$
$$A = \frac{5}{18}B - 12$$

**Gabarito: A.**

---

**14.**

Por que é melhor um bulbo de um termômetro ter formato cilíndrico em vez do formato esférico?

**Comentários:**

Quando temos um cilindro e uma esfera de mesmo volume, o cilindro possui área maior e isso implica contato maior.

Suponha que tenhamos um cilindro de raio  $r$  e altura  $\frac{4}{3}r$  e uma esfera de raio  $R$ . Seus volumes são dados por:

$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot \left(\frac{4r}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi r^3$$
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Se os seus volumes forem iguais, teremos:

$$R = r$$

Calculando a área da superfície dessas formas geométricas:

$$S_{cilindro} = 2\pi r \cdot \left(\frac{4}{3}r\right) + \pi r^2 + \pi r^2 = \frac{14}{3}\pi r^2$$
$$S_{esfera} = 4\pi r^2$$

Assim, confirmamos que  $S_{cilindro} > S_{esfera}$ .

**Gabarito:  $S_{cilindro} > S_{esfera}$**

---

**15.**

Um termopar é formado de dois metais diferentes, ligados em dois pontos de tal modo que uma pequena voltagem é produzida quando as duas junções estão em diferentes temperaturas. Num termopar específico ferro-constatam, com uma junção mantida a  $0^\circ\text{C}$ , a voltagem externa varia linearmente de 0 a  $28\text{ mV}$ , à medida que a temperatura de outra junção é elevada de  $0^\circ\text{C}$  até  $510^\circ\text{C}$ . Encontre a temperatura da junção variável quando o termopar gerar  $10,2\text{ mV}$ .





- a) 76 °C
- b) 86,2 °C
- c) 106,1 °C
- d) 186 °C
- e) 226 °C

**Comentários:**

Segundo o enunciado a voltagem varia linearmente com a diferença das temperaturas nas junções. Usando uma simples regra de 3:

$$\begin{array}{r} 28 \text{ mV} \text{ --- --- } 510 \text{ }^\circ\text{C} \\ 10,2 \text{ mV} \text{ --- --- } \theta \\ \theta \cong 185,78 \text{ }^\circ\text{C} \end{array}$$

**Gabarito: D.**

**16.**

Uma escala termométrica logarítmica relaciona a altura  $h$  de uma coluna de mercúrio Fahrenheit pela relação  $T = a + \log(bh)$ . Na calibração do termômetro para  $h_1 = 2,5 \text{ cm}$ , obteve-se  $T_1 = 4 \text{ }^\circ\text{F}$  e para  $h_2 = 25 \text{ cm}$  obteve-se  $T_2 = 5 \text{ }^\circ\text{F}$ .

- a) Determine as constantes  $a$  e  $b$ .
- b) Qual será a temperatura de um corpo que, quando em equilíbrio térmico com o termômetro, fornece  $h = 2,5 \text{ m}$ ?

**Comentários:**

- a) Substituindo a equação  $T(h_1) = T_1$ , obtemos:

$$4 = a + \log(2,5b) \quad (\text{eq. 1})$$

Substituindo a equação  $T(h_2) = T_2$ , obtemos:

$$5 = a + \log(25b) = a + \log(2,5b) + 1 \quad (\text{eq. 2})$$

As duas equações são linearmente dependentes, o que quer dizer que  $a$  e  $b$  não são constantes fixas, apenas devem obedecer a (1).

- b) Usaremos a função do enunciado: ( $h$  em centímetros)

$$T(250) = a + \log(250b) = a + \log(2,5a) + 2$$

Substituindo (2) na equação acima, obtemos:

$$T(250) = 4 + 2 = 6 \text{ }^\circ\text{F}$$



**Gabarito: a) indeterminadas b) 6 °F**

---

**17.**

Mergulham-se dois termômetros na água: um graduado na escala Celsius e outro na Fahrenheit. Depois do equilíbrio térmico, nota-se que a diferença entre as leituras nos dois termômetros é 172. Então, a temperatura da água em graus Celsius e Fahrenheit, respectivamente, é:

- a) 32 e 204
- b) 32 e 236
- c) 175 e 347
- d) 175 e 257

**Comentários:**

Lembrando da equação de conversão entre as escalas:

$$\frac{\theta_F - 32}{9} = \frac{\theta_C}{5}$$
$$\theta_F = \frac{9}{5}\theta_C + 32 \quad (eq. 1)$$

Note que  $\theta_F > \theta_C$  independente dos valores. Assim, como a diferença de leitura entre as escalas é 172, temos:

$$\theta_F = \theta_C + 172 \quad (eq. 2)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$\frac{4}{5}\theta_C = 140 \Rightarrow \theta_C = 175 \text{ °C}$$

Substituir o resultado acima em (2) resulta em:

$$\theta_C = 347 \text{ °F}$$

**Gabarito: C**

---

**18.**

Sobre os conceitos básicos da Termologia, considere as afirmativas abaixo:

- I. A temperatura é uma grandeza microscópica que avalia o grau de agitação de moléculas de um corpo;
- II. Comparando-se as sensações fisiológicas de “quente” e “frio” ao se tocar dois corpos distintos, é possível dizer com precisão qual deles está a maior temperatura;
- III. Dois corpos que estão a uma mesma temperatura têm a mesma energia interna;



- IV. Dois corpos de mesma massa, que estejam a uma mesma temperatura, têm a mesma energia interna;
- V. Quando um corpo é colocado “em contato” com a chama do fogo de um fogão, recebe calor e, portanto, sua temperatura aumenta;
- VI. Uma panela com água a  $80\text{ }^{\circ}\text{C}$  está quatro vezes mais quente que outra panela com água a  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ;
- VII. Um termômetro é exposto diretamente aos raios solares, portanto ele mede a temperatura do ar;
- VIII. Um termômetro é exposto diretamente aos raios solares, portanto ele mede a temperatura do Sol.

Pode-se afirmar que:

- A) apenas uma delas está correta.
- B) apenas duas delas estão corretas.
- C) apenas três delas estão corretas.
- D) apenas uma delas está errada.
- E) todas estão erradas.

#### Comentários:

- I. **Incorreto.** A temperatura é uma grandeza macroscópica. Uma grandeza microscópica seria, por exemplo, a velocidade de uma molécula de substância. Na realidade a temperatura está relacionada à entropia do sistema e ao número de estados possíveis em que o sistema pode se encontrar, mas de certa forma podemos relacionar isso com o grau de agitação das moléculas.
- II. **Incorreto.** A sensação nos passa somente uma informação sobre nossa mão e o objeto tocado: qual das temperaturas é a maior. Em relação à precisão desse método, note que ao sentirmos um objeto mais “frio” que outro, não podemos considerar a temperatura deste como sendo a menor, pois esse fenômeno acontece devido a diferença da taxa de transferência de calor, o que envolve outros fatores, como constantes de propagação térmica.
- III. **Incorreto.** Para um caso trivial, como um gás real, identificamos que sua energia interna depende da temperatura e pressão.
- IV. **Incorreto.** Veja III.
- V. **Incorreto.** Não podemos afirmar isso, pois depende da temperatura inicial do corpo. Quando em contato com a chama o corpo recebe constantemente energia da reação de combustão da chama, mas também pode estar perdendo energia para o ambiente (depende da diferença entre suas temperaturas, entre outros fatores).
- VI. **Incorreto.** Somente se esses sistemas já estiverem em contato por tempo o suficiente para haver equilíbrio térmico.
- VII. **Incorreto.** O termômetro entrará em equilíbrio térmico quando o seu fluxo de perda de energia para o ambiente for igual à energia recebida dos raios solares, logo sua



temperatura deve ser maior que a ambiente (para que ele esteja perdendo, de fato, energia para o ambiente).

VIII. **Incorreto.** Veja VII.

**Gabarito: E.**

---

**19.**

É dado um termômetro  $x$  tal que  $60\text{ }^\circ X$  correspondem a  $100\text{ }^\circ C$ ;  $20\text{ }^\circ X$  correspondem a  $20\text{ }^\circ C$ ;  $0\text{ }^\circ X$  corresponde a  $0\text{ }^\circ C$ . As leituras Celsius variam conforme trinômio de segundo grau nas leituras  $X$ . Deduzir a equação que dá leituras Celsius em função de leituras  $X$ .

**Comentários:**

Como o enuncia explicita que a leitura na escala Celsius é uma equação do segundo das leituras na escala  $X$ , temos:

$$\theta_C(x) = ax^2 + bx + c$$

Onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes a se determinar.

Substituindo os pontos:

$$\theta_C(0) = 0$$

$$c = 0$$

$$\theta_C(20) = 20$$

$$400a + 20b = 20$$

$$20a + b = 1 \quad (\text{eq. 1})$$

$$\theta_C(60) = 100$$

$$3600a + 60b = 100$$

$$180a + 3b = 5 \quad (\text{eq. 2})$$

Fazendo  $(2) - 3 \times (1)$ , obtemos:

$$120a = 2$$

$$a = \frac{1}{60}$$

Substituindo o resultado acima em  $(1)$  nos rende:

$$\frac{1}{3} + b = 1$$

$$b = \frac{2}{3}$$

Assim, podemos escrever a equação final como:

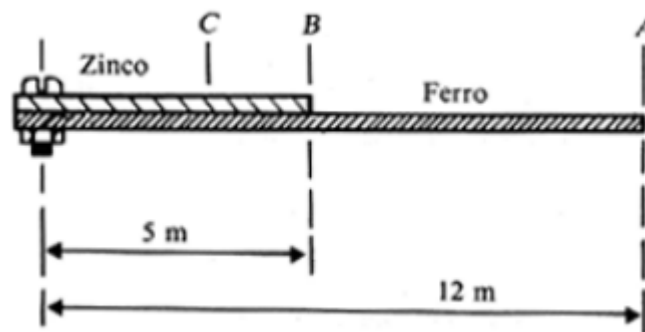


$$\theta_c(x) = \frac{x^2}{60} + \frac{2x}{3}$$

**Gabarito:**  $\theta_c = \frac{2}{3}x + \frac{1}{60}x^2$

### 20. (Fuvest-SP)

Duas barras metálicas finas, uma de zinco e outra de ferro, cujos comprimentos, a uma temperatura de  $300\text{ K}$ , valem  $5,0\text{ m}$  e  $12,0\text{ m}$ , respectivamente, são sobrepostas e aparafusadas uma à outra em uma de suas extremidades, conforme ilustra a figura. As outras extremidades B e A das barras de zinco e ferro, respectivamente, permanecem livres. Os coeficientes de dilatação linear do zinco e do ferro valem  $3,0 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$  e  $1,0 \cdot 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ , respectivamente. Desprezando as espessuras das barras, determine:



- a) a variação da distância entre as extremidades A e B quando as barras são aquecidas até  $400\text{ K}$ ;
- b) a distância até o ponto A, de um ponto C da barra de zinco cuja distância ao ponto A não varia com a temperatura.

### Comentários:

- a) Sejam  $l_A$  e  $l_B$  os comprimentos das barras A e B, respectivamente. Assim, temos:

$$\begin{aligned} d_f - d_0 &= |(l_A - l_B) - (l_{A0} - l_{B0})| \\ \Delta d &= |(l_A - l_{A0}) - (l_B - l_{B0})| \\ &= |\Delta l_A - \Delta l_B| \\ \Delta d &= |(\alpha_A l_{A0} - \alpha_B l_{B0}) \Delta \theta| \\ \Delta d &= 3 \cdot 10^{-5} \cdot 300 = 9\text{ mm} \end{aligned}$$

- b) A variação da distância entre os pontos A e C é encontrada de forma idêntica ao item a:

$$\begin{aligned} d_f - d_0 &= |(l_A - l_C) - (l_{A0} - l_{C0})| \\ d_f - d_0 &= |\alpha_A l_{A0} - \alpha_C l_{C0}| \Delta \theta \end{aligned}$$

Queremos uma variação nula, logo:

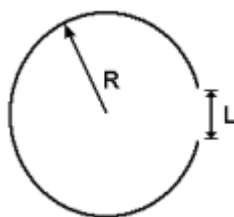


$$\alpha_A l_{A0} = \alpha_C l_{C0}$$
$$l_{C0} = \frac{\alpha_A}{\alpha_C} l_A = \frac{1}{3} 12 = 4 \text{ m}$$

**Gabarito: a) 9 mm, b) 4 m**

### 21. (UFV 1999)

A figura a seguir ilustra um arame rígido de aço, cujas extremidades estão distanciadas de "L". Alterando-se sua temperatura, de 293K para 100 °C, pode-se afirmar que a distância "L":



- a) diminui, pois o arame aumenta de comprimento, fazendo com que suas extremidades fiquem mais próximas.
- b) diminui, pois o arame contrai com a diminuição da temperatura.
- c) aumenta, pois o arame diminui de comprimento, fazendo com que suas extremidades fiquem mais afastadas.
- d) não varia, pois, a dilatação linear do arame é compensada pelo aumento do raio "R".
- e) aumenta, pois, a área do círculo de raio "R" aumenta com a temperatura.

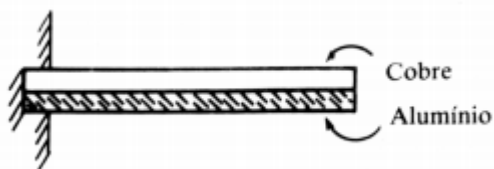
### Comentários:

Quando o material sofre expansão térmica as suas moléculas se distanciam de forma uniforme, assim, em uma circunferência, a única forma de aumentarmos o comprimento é aumentando o raio do arranjo.

**Gabarito: E**

### 22. (Vunesp)

A lâmina bimetálica da figura abaixo é feita de cobre ( $\alpha = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ) e de alumínio ( $\alpha = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ ). Uma das partes não pode deslizar sobre a outra e o sistema está engastado numa parede.



Se na temperatura ambiente ( $27\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) ela é horizontal, a afirmativa correta sobre o comportamento da lâmina ( $\alpha$  é o coeficiente de dilatação linear) é:

- a) Sempre se curva para baixo quando muda a temperatura.
- b) Sempre se curva para cima quando muda a temperatura.
- c) Se curva para baixo se  $t < 27\text{ }^{\circ}\text{C}$  e para cima se  $t > 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- d) Se curva para cima se  $t < 27\text{ }^{\circ}\text{C}$  e para baixo se  $t > 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ .
- e) Somente se curva se  $t < 27\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

### Comentários:

Lembre-se da expressão da variação de comprimento:

$$\Delta l = \alpha l_0 \Delta \theta \quad (\text{eq. 1})$$

O comprimento inicial dos dois materiais em questão é o mesmo, assim como a variação em suas temperaturas.

Como as barras não podem deslizar temos que os pontos que estavam se tocando no começo devem ainda se tocar ao fim. Em contraste, as barras possuem comprimento final distintos, assim devem formar um arco de circunferência, de modo que a barra de maior comprimento é aquela por fora do arco.

De acordo com (1), o material de maior coeficiente de dilatação linear sofrerá maior variação em seu comprimento. Assim a barra de alumínio, localizada em baixo, sofrerá maiores variações em seu comprimento.

Se  $t < 27$  as variações serão negativas e a barra de cobre será a maior, sendo ela exterior ao arco de circunferência formado (curvatura para baixo).

Pelo mesmo raciocínio mostrado acima, se  $t > 27$ , temos uma curva para cima.

### Gabarito: C

---

#### 23. (ITA-1969)

Um anel de cobre a  $25\text{ }^{\circ}\text{C}$  tem um diâmetro interno de 5,00 centímetros. Qual das opções abaixo corresponderá ao diâmetro interno deste mesmo anel a  $275\text{ }^{\circ}\text{C}$ , admitindo-se que o coeficiente de dilatação térmica do cobre no intervalo de  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $300\text{ }^{\circ}\text{C}$  é constante e igual a  $1,60 \cdot 10^{-5}\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ .

- a) 4,98 cm.
- b) 5,00 cm.
- c) 5,02 cm.
- d) 5,20 cm.
- e) nenhuma das respostas acima.



### Comentários:

O anel se expande uniformemente, assim podemos usar a expressão de dilatação linear com qualquer distância entre pontos do corpo, em particular, podemos usar com seu diâmetro  $d$ :

$$d = d_0 + \Delta d = d_0 + d_0 \alpha \Delta \theta = d_0 (1 + \alpha \Delta \theta)$$

$$d = 5(1 + 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot 250) = 5,02 \text{ cm}$$

### Gabarito: C

---

#### 24. (ITA-1970)

O vidro Pyrex apresenta maior resistência ao choque térmico do que o vidro comum porque:

- a) possui alto coeficiente de rigidez.
- b) tem baixo coeficiente de dilatação térmica.
- c) tem alto coeficiente de dilatação térmica.
- d) tem alto calor específico.
- e) é mais maleável que o vidro comum.

### Comentários:

As rupturas no material ocorrem quando a variação de comprimento não consegue seguir o valor ditado pela variação em temperatura:

$$\Delta l = \alpha l \Delta \theta$$

Em situação do dia-a-dia não temos controle na variação de temperatura, ou não queremos ter essa preocupação, assim foi arranjado uma solução, usando boro silicato, minimizando  $\alpha$  e  $\Delta l$ .

Ter um alto calor específico também poderia tornar o vidro mais resistente, já que diminuiria  $\Delta \theta$  para uma mesma fonte de energia, no entanto, a tecnologia Pyrex não funciona baseada nisso.

### Gabarito: B.

---

#### 25. (ITA-1975)

Uma barra de cobre de  $1,0 \text{ m}$  de comprimento, à temperatura de  $24 \text{ }^\circ\text{C}$ , tem coeficiente de dilatação linear  $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Então, a temperatura em que a barra terá um milímetro a menos de comprimento será:

- a)  $-31 \text{ }^\circ\text{F}$ .
- b)  $-59 \text{ }^\circ\text{F}$ .
- c)  $95 \text{ }^\circ\text{F}$ .





- d)  $162,5^{\circ}F$ .
- e) nenhuma das respostas anteriores.

**Comentários:**

Lembrando da expressão da variação de comprimento:

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta \theta$$
$$\Delta l = 1,0 \cdot 1,7 \cdot 10^{-5} \cdot (\theta_{final} - 24) = -1,0 \cdot 10^{-3}$$
$$\theta_{final} \approx 24 - 58,8 = -34,8^{\circ}C$$

O valor encontrado acima se encontra na escala Celsius. Convertendo o valor para a escala Fahrenheit:

$$\frac{\theta_F - 32}{9} = \frac{\theta_C}{5}$$
$$\theta_F = \frac{9}{5} \theta_C + 32$$
$$\theta_F \approx -62,7 + 32 = -30,7^{\circ}F$$

**Gabarito: A**

---

**26. (ITA-1980)**

Uma placa metálica tem um orifício circular de  $50 \text{ mm}$  de diâmetro a  $15^{\circ}C$ . A que temperatura deve ser aquecida a placa para que se possa ajustar ao orifício de um cilindro de  $50,3 \text{ mm}$  de diâmetro? O coeficiente de dilatação linear do metal é  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$  por kelvin.

- a)  $520 \text{ K}$ .
- b)  $300^{\circ}C$ .
- c)  $300 \text{ K}$ .
- d)  $520^{\circ}C$ .
- e)  $200^{\circ}C$ .

**Comentários:**

Perceba que o coeficiente de dilatação é dado em  $K^{-1}$ , assim é mais conveniente trabalharmos com temperaturas em Kelvin. Fazendo a conversão da temperatura inicial:

$$\theta_{K,0} = \theta_{C,0} + 273$$
$$\theta_{K,0} = 288 \text{ K}$$

Lembre-se que o material se expande uniformemente em qualquer dimensão. Queremos uma variação de distância de  $0,3 \text{ mm}$ , logo:



$$\Delta d = d_0 \alpha \Delta \theta$$

$$0,3 = 50 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} \cdot (\theta_K - 288)$$

$$\theta_K = 788 \text{ K}$$

Voltando para a escala Celsius:

$$\theta_C = \theta_K - 273$$

$$\theta_C = 515 \text{ }^\circ\text{C}$$

**Gabarito: D**

---

**27. (ITA-1989)**

Um anel de cobre, a  $25 \text{ }^\circ\text{C}$ , tem um diâmetro interno de  $5,00 \text{ cm}$ . Qual das opções abaixo corresponderá ao diâmetro interno desse mesmo anel a  $275 \text{ }^\circ\text{C}$ , admitindo-se que o coeficiente de dilatação linear do cobre, no intervalo  $0 \text{ }^\circ\text{C}$  a  $300 \text{ }^\circ\text{C}$ , é constante e igual a  $1,60 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ?

- a) 4,98 cm.
- b) 5,00 cm.
- c) 5,02 cm.
- d) 5,08 cm.
- e) 5,12 cm.

**Comentários:**

Como teremos um coeficiente de dilatação constante, podemos escrever:

$$\Delta d = d_0 \alpha \Delta \theta$$

Assim, o diâmetro final é dado por:

$$d_{final} = d_0 + \Delta d$$

$$d_{final} = d_0(1 + \alpha \Delta \theta)$$

$$d_{final} = 5(1 + 1,6 \cdot 10^{-5} \cdot 250) = 5,02 \text{ cm}$$

**Gabarito: C.**

---

**28. (ITA-1994)**

Um bulbo de vidro cujo coeficiente de dilatação linear é  $3 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  está ligado a um capilar do mesmo material. À temperatura de  $-10,0 \text{ }^\circ\text{C}$  a área da secção do capilar é  $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$  e todo o mercúrio cujo coeficiente de dilatação volumétrica é  $180 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  ocupa o volume

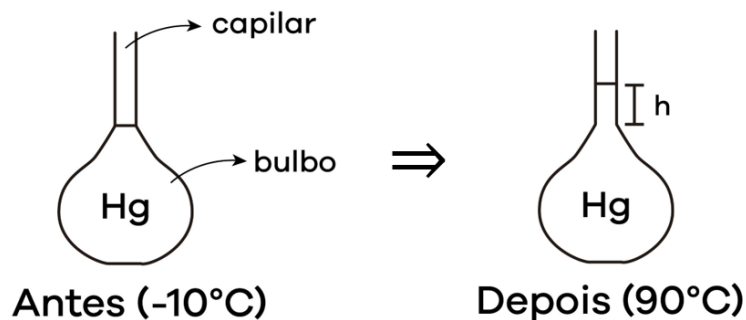


total do bulbo, que a esta temperatura é  $0,500 \text{ cm}^3$ . O comprimento da coluna de mercúrio a  $90,0 \text{ }^\circ\text{C}$  será:

- a) 270 mm.
- b) 540 mm.
- c) 285 mm.
- d) 300 mm.
- e) 257 mm.

### Comentários:

Veja a representação das etapas abaixo:



A altura  $h$  é correspondente ao excesso de líquido que transborda do bulbo, esse excesso deve ser calculado em relação ao volume final do bulbo.

Calculando o volume final do bulbo:

$$V_f = V_0 + \Delta V$$

$$V_f = V_0(1 + \gamma\Delta\theta) = V_0(1 + 3\alpha\Delta\theta) \quad (\text{eq. 1})$$

Calculando o volume final de mercúrio:

$$V_{f,Hg} = V_0 + \Delta V_{Hg} = V_0(1 + \gamma_{Hg}\Delta\theta) \quad (\text{eq. 2})$$

Onde  $V_0$  é o mesmo nos dois casos, já que o recipiente estava cheio no início.

Assim, o volume transbordado é:

$$V_{trans} = V_{f,Hg} - V_f$$

Substituindo (1) e (2) na equação acima, temos:

$$V_{trans} = V_0\Delta\theta(\gamma_{Hg} - 3\alpha) \quad (\text{eq. 3})$$

O mercúrio que está no capilar tem formato cilíndrico, logo seu volume é dado por:

$$V_{trans} = A_{cap}h \quad (\text{eq. 4})$$

A área do capilar também sofreu dilatação com a variação de temperatura:

$$A_{cap} = A_0(1 + \beta\Delta\theta) = A_0(1 + 2\alpha\Delta\theta) \quad (\text{eq. 5})$$

Substituindo (5) e (3) em (4), obtemos:



$$h = \frac{V_0 \Delta \theta (\gamma_{Hg} - 3\alpha)}{A_0 (1 + 2\alpha \Delta \theta)}$$
$$h \approx 285 \text{ mm}$$

**Gabarito: C**

---

**29. (ITA-1995)**

Você é convidado a projetar uma ponte metálica, cujo comprimento será 2,0 km. Considerando os efeitos de contração e dilatação térmica para temperaturas no intervalo de  $-40^\circ F$  a  $110^\circ F$  e o coeficiente de dilatação linear do metal que é de  $12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ C^{-1}$ , qual a máxima variação esperada no comprimento da ponte? (O coeficiente de dilatação linear é constante no intervalo de temperatura considerado).

- a) 9,3 m.
- b) 2,0 m.
- c) 3,0 m.
- d) 0,93 m.
- e) 6,5 m.

**Comentários:**

Note que a temperatura está em Fahrenheit e o coeficiente de dilatação é dado em Celsius. Convertendo as temperaturas:

$$\frac{\theta_{0,C}}{5} = \frac{\theta_{0,F} - 32}{9} = -\frac{72}{9} = -8$$
$$\theta_{0,C} = -40^\circ C$$
$$\frac{\theta_{f,C}}{5} = \frac{\theta_{f,F} - 32}{9} = \frac{78}{9}$$
$$\theta_{f,C} \approx 43,3^\circ C$$

Pela expressão que relaciona a variação de comprimentos com a temperatura:

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta \theta$$

Temos que a maior variação em comprimento ocorrerá com a maior variação de temperatura:

$$\Delta l = 2000 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot (43,3 - (-40))$$
$$\Delta l \approx 2 \text{ m}$$

**Gabarito: B**

---



### 30. (ITA 1995)

Se duas barras, uma de alumínio com comprimento  $L_1$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha_1 = 2,3 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  e outra de aço com comprimento  $L_2 > L_1$  e coeficiente de dilatação térmica  $\alpha_2 = 1,10 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  apresentam uma diferença em seus comprimentos a  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , de  $1000 \text{ mm}$  e esta diferença se mantém constante com a variação da temperatura, podemos concluir que os comprimentos  $L_1$  e  $L_2$  são a  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ :

- a)  $L_1 = 91,7 \text{ mm}$   $L_2 = 1091,7 \text{ mm}$
- b)  $L_1 = 67,6 \text{ mm}$   $L_2 = 1067,6 \text{ mm}$
- c)  $L_1 = 917 \text{ mm}$   $L_2 = 1917 \text{ mm}$
- d)  $L_1 = 676 \text{ mm}$   $L_2 = 1676 \text{ mm}$
- e)  $L_1 = 323 \text{ mm}$   $L_2 = 1323 \text{ mm}$

#### Comentários:

Seja  $L_1(\theta)$  e  $L_2(\theta)$  o comprimento das barras a uma temperatura  $\theta$ . A expressão desses comprimentos é dada abaixo:

$$L_1(\theta) = L_1 + \Delta L(\theta) = L_1(1 + \alpha_1(\theta - 0)) = L_1(1 + \alpha_1\theta) \quad (\text{eq. 1})$$

$$L_2(\theta) = L_2 + \Delta L(\theta) = L_2(1 + \alpha_2\theta) \quad (\text{eq. 2})$$

Usando (1) e (2), podemos encontrar a diferença em comprimento a qualquer temperatura:

$$L_2(\theta) - L_1(\theta) = L_2 - L_1 + \theta(L_2\alpha_2 - L_1\alpha_1) \quad (\text{eq. 3})$$

A equação em (3) é linear, logo, para ser constante, o seu coeficiente linear deve ser nulo:

$$L_2\alpha_2 - L_1\alpha_1 = 0$$

$$L_2 = \frac{L_1\alpha_1}{\alpha_2} \quad (\text{eq. 3})$$

Lembrando que o enunciado nos fornece a diferença dos comprimentos a  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ , temos:

$$L_2 - L_1 = 1000 \quad (\text{eq. 4})$$

Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$L_1 = \frac{1000\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = 1000 \frac{1,1}{1,2} \approx 917 \text{ mm}$$

Substituindo o resultado acima em (3), temos:

$$L_2 \approx 1917 \text{ mm}$$

#### Gabarito: C

### 31. (ITA-1997)



Um certo volume de mercúrio, cujo coeficiente de dilatação volumétrica é  $\gamma_m$ , é introduzido num vaso de volume  $V_0$ , feito de vidro de coeficiente de dilatação volumétrica  $\gamma_V$ . O vaso com mercúrio, inicialmente a  $0^\circ\text{C}$ , é aquecido a uma temperatura  $T$  (em  $^\circ\text{C}$ ). O volume da parte vazia do vaso à temperatura  $T$  é igual à parte vazia do mesmo a  $0^\circ\text{C}$ . O volume de mercúrio introduzido no vaso a  $0^\circ\text{C}$  é:

- a)  $\left(\frac{\gamma_V}{\gamma_m}\right) V_0$
- b)  $\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_V}\right) V_0$
- c)  $\left(\frac{\gamma_m}{\gamma_V}\right) \cdot \left[\frac{273}{T + 273}\right] \cdot V_0$
- d)  $\left(1 - \left(\frac{\gamma_V}{\gamma_m}\right)\right) V_0$
- e)  $\left(1 - \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_V}\right)\right) V_0$

### Comentários:

O volume da parte vazia do vaso é a diferença de volume entre o vaso e o mercúrio, assim é essa grandeza que se mantém constante.

Seja  $V_m(T)$  e  $V_V(T)$  os volumes do mercúrio e vaso, respectivamente, a uma temperatura  $T$ . A expressão desses volumes é dada abaixo:

$$V_m(T) = V_{0,m} + \Delta V(T) = V_{0,m}(1 + \gamma_m(T - 0)) = V_{0,m}(1 + \gamma_m T) \quad (\text{eq. 1})$$

$$V_V(T) = V_0 + \Delta V(T) = V_0(1 + \gamma_V T) \quad (\text{eq. 2})$$

Usando (1) e (2), podemos encontrar a diferença em volume a qualquer temperatura:

$$V_V(T) - V_m(T) = V_0 - V_{0,m} + T(V_0\gamma_V - V_{0,m}\gamma_m) \quad (\text{eq. 3})$$

A equação em (3) é linear, logo, para ser constante, o seu coeficiente linear deve ser nulo:

$$V_0\gamma_V - V_{0,m}\gamma_m = 0$$

$$V_{0,m} = \frac{V_0\gamma_V}{\gamma_m}$$

### Gabarito: A

#### 32. (ITA-2002)

Um pequeno tanque, completamente preenchido com 20,0 L de gasolina a  $0^\circ\text{F}$ , é logo a seguir transferido para uma garagem mantida à temperatura de  $70^\circ\text{F}$ . Sendo  $\gamma = 0,0012^\circ\text{C}^{-1}$  o coeficiente de expansão volumétrica da gasolina, a alternativa que melhor expressa o volume de gasolina que vazará em consequência do seu aquecimento até a temperatura da garagem é:

- a) 0,507 L.



- b) 0,940 L.
- c) 1,68 L.
- d) 5,07 L.
- e) 0,17 L.

**Comentários:**

Note que a temperatura está em Fahrenheit e o coeficiente de dilatação é dado em Celsius. Convertendo as temperaturas:

$$\frac{\theta_{0,C}}{5} = \frac{\theta_{0,F} - 32}{9} = -\frac{32}{9}$$

$$\theta_{0,C} \approx -17,8^\circ\text{C}$$

$$\frac{\theta_{f,C}}{5} = \frac{\theta_{f,F} - 32}{9} = \frac{38}{9}$$

$$\theta_{f,C} \approx 21,1^\circ\text{C}$$

A gasolina que irá vazar é igual a diferença nos volumes finais da gasolina e tanque:

$$V_{vaz} = V_{gás} - V_t$$

$$V_{vaz} = V_t(1 + \gamma\Delta\theta) - V_t$$

Onde  $V_t$  é a o volume do tanque, o qual é igual ao volume inicial da gasolina. Além disso, a variação em volume do tanque é considerada desprezível em relação à variação no volume da gasolina.

$$V_{vaz} = \gamma V_t \Delta\theta \approx 0,940 L$$

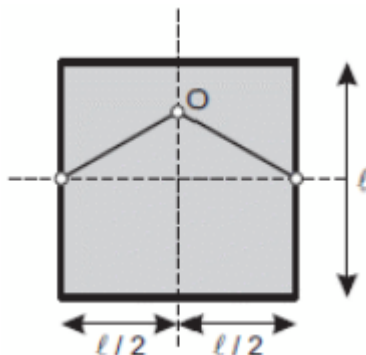
**Gabarito: B**

---

**33. (ITA-2010)**

Um quadro quadrado de lado  $l$  e massa  $m$ , feito de um material de coeficiente de dilatação superficial  $\beta$ , é pendurado no pino O por uma corda inextensível, de massa desprezível, com as extremidades fixadas no meio das arestas laterais do quadro, conforme a figura. A força de tração máxima que a corda pode suportar é  $F$ . A seguir, o quadro é submetido a uma variação de temperatura  $\Delta T$ , dilatando. Considerando desprezível a variação no comprimento da corda devida à dilatação, podemos afirmar que o comprimento mínimo da corda para que o quadro possa ser pendurado com segurança é dado por:

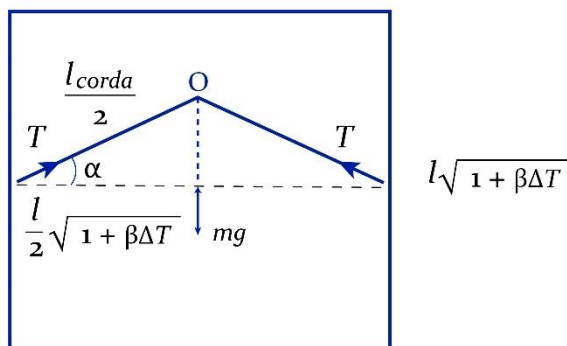




- f)  $2lF\sqrt{\beta\Delta T}/mg$
- g)  $2lF(1 + \beta\Delta T)/mg$
- h)  $2lF(1 + \beta\Delta T)/\sqrt{4F^2 - m^2g^2}$
- i)  $2lF\sqrt{(1 + \beta\Delta T)}/(2F - mg)$
- j)  $2lF\sqrt{(1 + \beta\Delta T)}/(4F^2 - m^2g^2)$

**Comentários:**

Considere o esquema abaixo:



A área do lado do quadrado após dilatada é:

$$A_f = A(1 + \beta\Delta T)$$

Como se trata de um quadrado, temos:

$$l = \sqrt{A}$$

$$l_f = \sqrt{A_f}$$

$$l_f = l\sqrt{1 + \beta\Delta T}$$

Equilibrando as forças agindo sobre o quadro, obtemos:

$$2T \sin \alpha = mg$$

A máxima tensão que pode haver na corda é  $F$ , assim temos:





$$\frac{mg}{2 \operatorname{sen} \alpha} \leq F$$

$$\operatorname{sen} \alpha \geq \frac{mg}{2F} \quad (\text{eq. 1})$$

Pelo triângulo retângulo representado no esquema, temos:

$$\cos^2 \alpha = \frac{\frac{l^2}{4} (1 + \beta \Delta T)^{\frac{1}{2} \cdot 2}}{\frac{l_{\text{corda}}^2}{4}} = 1 - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$l_{\text{corda}} = \frac{l \sqrt{(1 + \beta \Delta T)}}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}}$$

Substituindo a desigualdade em (1) na equação acima, obtemos:

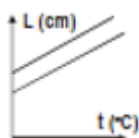
$$l_{\text{corda}} \geq \frac{l \sqrt{(1 + \beta \Delta T)}}{\sqrt{1 - \frac{m^2 g^2}{4F^2}}} = \frac{2Fl \sqrt{(1 + \beta \Delta T)}}{\sqrt{4F^2 - m^2 g^2}}$$

**Gabarito: E**

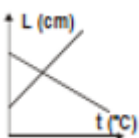
### 34. (OBF – 2005)

Dois barras metálicas, de comprimentos diferentes e coeficientes de dilatação iguais, são aquecidas e, a partir dos valores medidos para que o comprimento e a temperatura, foi elaborado um gráfico. A figura que melhor representa o gráfico obtido é:

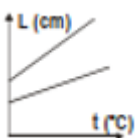
a)



b)

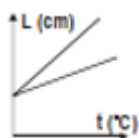


c)

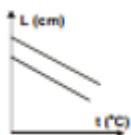


d)





e)



### Comentários:

A variação no comprimento da barra quando esta é submetida à uma variação na temperatura é dada por:

$$\Delta l = l_0 \alpha \Delta t$$

Considerando que para o comprimento inicial  $t = 0$ , na escala relevante.

$$l - l_0 = l_0 \alpha t$$

$$l = l_0 + l_0 \alpha \cdot t$$

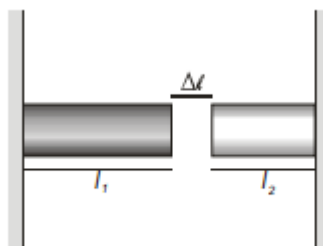
A equação acima representa uma reta, com coeficiente linear  $l_0$  e coeficiente angular  $l_0 \alpha$ .

Logo, o gráfico da barra de maior comprimento deve apresentar o maior coeficiente linear e angular.

### Gabarito: C.

#### 35. (OBF – 2007)

Considere duas barras delgadas, de comprimento  $l_1$  e  $l_2$ , feitas de materiais cujos coeficientes de dilatação linear são, respectivamente,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . As barras estão dispostas de modo a estarem separadas por uma distância  $\Delta l$ , conforme mostra a figura abaixo.



A que variação de temperatura deve ser submetido o sistema para que o espaçamento  $\Delta l$ , entre as duas barras, seja completamente preenchido? Considere que apenas as barras sofrem influência desta variação de temperatura.

### Comentários:



Considere a variação individual do comprimento de cada barra para uma variação de temperatura  $\Delta\theta$ :

$$\Delta l_1 = l_1 \alpha_1 \Delta\theta$$

$$\Delta l_2 = l_2 \alpha_2 \Delta\theta$$

Para que o vazio entre elas seja fechado, essas variações devem preencher  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

$$\Delta l = (l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2) \Delta\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{\Delta l}{l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2}$$

Gabarito:  $\Delta\theta = \frac{\Delta l}{l_1 \alpha_1 + l_2 \alpha_2}$ .

### 36. (OBF – 2007)

A conhecida fórmula de dilatação térmica, na qual o comprimento de uma barra varia linearmente com a temperatura só é exata se a variação de temperatura não for grande. Para grandes variações de temperatura esta fórmula perde precisão e pode levar a erros grosseiros. Contudo, podemos, mesmo assim, utilizar esta fórmula para grandes variações se admitirmos que o coeficiente de dilatação térmica varie com a temperatura, ou melhor, que este coeficiente permanece constante em uma determinada faixa de temperatura e tome outro valor em outra faixa. Suponha que uma barra, construída com material cujo coeficiente de dilatação  $\alpha$  varie com a temperatura como mostrado na figura 7, tenha comprimento  $L_0$  à temperatura  $T_0$ .

a) Qual o comprimento da barra na temperatura  $T_4$ ?

b) Se, ao invés do procedimento anterior, admitirmos que o valor  $\alpha$  é o mesmo para todas as temperaturas (e igual ao valor médio dos coeficientes de temperatura apresentados no gráfico) qual seria o comprimento da barra à temperatura  $T_4$ ?

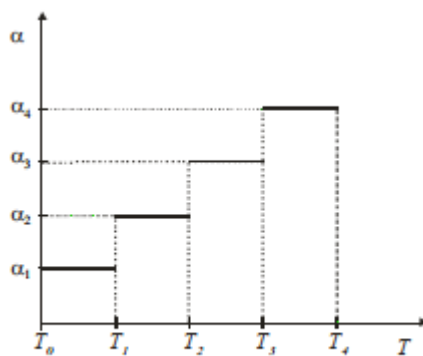


Fig. 7

Comentários:



- a) Considere um processo de 4 passos, esquentando a barra de  $T_0$  a  $T_1$ , de  $T_1$  a  $T_2$ , de  $T_2$  a  $T_3$  e, por fim, de  $T_3$  a  $T_4$ . A variação de comprimento seria a soma da variação de comprimento em cada uma dessas processos, e o coeficiente de dilatação é constante em cada um deles:

$$\Delta L_1 = L_0 \alpha_1 (T_1 - T_0)$$
$$L_1 = L_0 (1 + \alpha_1 (T_1 - T_0))$$

Note que  $L_1$  será o comprimento inicial pro segundo processo. Repetindo o raciocínio, temos:

$$\Delta L_2 = L_1 \alpha_2 (T_2 - T_1)$$
$$L_2 = L_1 (1 + \alpha_2 (T_2 - T_1))$$
$$L_2 = L_0 (1 + \alpha_1 (T_1 - T_0)) (1 + \alpha_2 (T_2 - T_1))$$

De uma forma geral, para  $L_N$ :

$$L_N = L_0 (1 + \alpha_1 (T_1 - T_0)) \dots (1 + \alpha_N (T_N - T_{N-1}))$$

Para encontrarmos a resposta do item, basta fazer  $N = 4$ .

- b) Calculando o coeficiente médio:

$$\alpha_m = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4}$$

Como o valor de  $\alpha$  é considerado constante aqui, podemos usar a expressão normal em todo o intervalo de temperaturas:

$$\Delta L = L_0 \alpha_m (T_4 - T_0)$$
$$L = L_0 \left( 1 + \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4} \right) (T_4 - T_0) \right)$$

**Gabarito: a)**  $L_4 = L_0 (1 + \alpha_1 (T_1 - T_0)) (1 + \alpha_2 (T_2 - T_1)) (1 + \alpha_3 (T_3 - T_2)) (1 + \alpha_4 (T_4 - T_3))$ ,

**b)**  $L = L_0 \left( 1 + \left( \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4}{4} \right) (T_4 - T_0) \right)$ .

### 37. (OBF – 2009)

Furos circulares de diâmetros iguais são feitos em duas chapas metálicas que têm as mesmas espessuras e são submetidas a variações iguais de temperatura. Uma das chapas é de cobre (coeficiente de dilatação linear igual a  $2,4 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ) e a outra, de alumínio (coeficiente de dilatação linear  $1,2 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ). Se depois de aquecidas o furo na chapa de alumínio sofreu uma variação de área igual a 2% relativamente à sua área inicial, a chapa de cobre sofreu uma variação correspondente a:

- a) 8%
- b) 2%
- c) 1%
- d) 4%
- e) 0,5%

#### Comentários:

Como os furos possuem o mesmo diâmetro, o mesmo pode ser dito de duas áreas. A variação na área da chapa de alumínio é dada por:



$$\Delta A_{Al} = A_0 \beta_{Al} \Delta \theta \quad (\text{eq. 1})$$

Como a variação é pequena em relação ao seu valor original, podemos fazer a aproximação:

$$\beta_{Al} = 2\alpha_{Al} \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$\begin{aligned} \Delta A &= 2A_0 \alpha_{Al} \Delta \theta \\ 0,02A_0 &= 2A_0 \alpha_{Al} \Delta \theta \\ \Delta \theta &= \frac{0,01}{\alpha_{Al}} \quad (\text{eq. 3}) \end{aligned}$$

A variação na área da chapa de cobre é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta A_{Cu} &= A_0 (2\alpha_{Cu}) \Delta \theta \\ \Delta A_{Cu} &= 0,02A_0 \frac{\alpha_{Cu}}{\alpha_{Al}} = 0,04A_0 \end{aligned}$$

Ou 4% da área inicial.

**Gabarito: D.**

---

### 38. (OBF – 2009)

Uma armação cúbica de arestas de comprimento  $L_0$ , feitas com arame cilíndrico muito fino de coeficiente de dilatação linear  $\alpha$ , constante, inicialmente a uma temperatura  $T_0$ , é aquecida a uma temperatura final  $T$ . Admitindo-se que  $\alpha$  e  $(T - T_0)$  possuem ordens de grandeza respectivas de  $10^{-4}$  e  $10^2$ , determine a ordem de grandeza das variações de área das faces e volume do cubo em questão.

#### Comentários:

Podemos apenas encontrar ordens de grandeza em relação ao lado inicial do cubo já que esse não foi dado. Lembre-se da expressão de variação de comprimentos:

$$\Delta L = L_0 \alpha (T - T_0)$$

Assim, a variação no comprimento das arestas é da ordem de:  $\Delta L \sim 10^{-2} L_0$

Lembre-se que a área das faces do cubo é dada por:

$$\begin{aligned} A &= L^2 = (L_0 + \Delta L)^2 \\ A &= L_0^2 + 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 \\ \Delta A &= 2L_0 \Delta L + \Delta L^2 \end{aligned}$$

Como  $10^{-2} \ll 2$ , temos:

$$\Delta A \approx 2\Delta L L_0 = 10^{-2} (2L_0)$$

O termo 2 foi mantido já que sua multiplicação por  $L_0$  pode alterar a ordem.



O volume do cubo é dado por:

$$V = L^3 = (L_0 + \Delta L)^3$$
$$V = L_0^3 + 3L_0^2\Delta L + 3L_0\Delta L^2 + \Delta L^3$$

Como  $10^{-2} \ll 3$ , temos:

$$\Delta V \approx 10^{-2}(3L_0)$$

**Gabarito:**  $10^{-2}(2L_0)$ ,  $10^{-2}(3L_0)$ .

---

### 39. (OBF – 2014)

Um termômetro pode ser feito de um tubo fino de vidro, o capilar, conectado a um pequeno recipiente, o bulbo. O bulbo contém material líquido que se dilata com a temperatura. Em alguns termômetros usa-se o mercúrio líquido como fluido. Quando há troca de calor entre um corpo e o bulbo do termômetro a temperatura do mercúrio, alterando seu volume. Assim, o nível do mercúrio muda ao longo do capilar até que se atinja o equilíbrio térmico. O termômetro clínico, por exemplo, é usado na medição da temperatura do corpo humano e são construídos para medir temperaturas entre  $34^\circ\text{C}$  e  $43^\circ\text{C}$ . Em 2003 o INMETRO (Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia) através de uma portaria proibiu o uso dos termômetros de mercúrio. Em substituição ao mercúrio, alguns termômetros têm sido produzidos usando álcool. O coeficiente de expansão térmica volumétrico do álcool é cerca de 5 vezes maior que o do mercúrio. Considerando que os volumes dos bulbos sejam iguais, qual deve ser a razão entre os diâmetros dos capilares de termômetros clínicos de mercúrio e álcool para que ambos apresentem a mesma escala? Despreze os efeitos da variação de temperatura do vidro

#### Comentários:

A equivalência ocorrerá se uma certa variação de temperatura gerar a mesma variação de altura no capilar. A expressão para as variações de volume são:

$$\Delta V_{Hg} = V_0\gamma_{hg}\Delta\theta$$
$$\Delta V_{alc} = V_0\gamma_{alc}\Delta\theta = V_0(5\gamma_{Hg})\Delta\theta = 5(V_0\gamma_{Hg}\Delta\theta)$$
$$\Delta V_{alc} = 5\Delta V_{Hg}$$

Esse volume adicional terá a forma cilíndrica do capilar, logo:

$$\Delta V = \Delta h A_{capilar}$$

Lembrando que queremos a mesma variação na altura para ambos os termômetros:

$$\frac{\Delta V_{Hg}}{A_{capilar,Hg}} = \frac{\Delta V_{alc}}{A_{capilar,alc}}$$
$$\frac{A_{capilar,alc}}{A_{capilar,Hg}} = \frac{\Delta V_{alc}}{\Delta V_{Hg}} = 5$$



O capilar tem uma secção circular, logo:

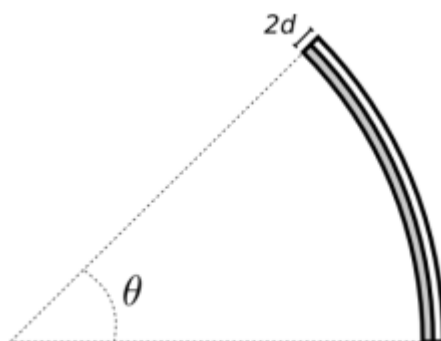
$$\frac{d_{\text{capilar,alc}}^2}{d_{\text{capilarHg}}^2} = 5$$

$$\boxed{\frac{d_{\text{capilar,alc}}}{d_{\text{capilar,Hg}}} = \sqrt{5}}$$

**Gabarito:**  $\sqrt{5}$ .

#### 40. (OBF – 2016)

Uma tira bimetálica é formada soldando-se duas tiras finas de metais distintos, cada uma delas com largura  $d$ . Na temperatura de referência  $T_0$ , as duas tiras têm o mesmo comprimento  $l_0$ . Quando a temperatura se eleva de  $\Delta T$  as tiras se encurvam como mostra a figura abaixo. Sejam  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  os coeficientes de dilatação linear de cada metal, determine o ângulo de encurvamento  $\theta$  em termos de  $\Delta T$ ,  $l_0$ ,  $d$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . O que aconteceria se a tira bimetálica fosse resfriada em relação à sua temperatura de referência?



#### Comentários:

Considere que o raio de curvatura seja  $R$ . Além disso, consideraremos que a equação normal de variação de comprimento se aplique no comprimento central de cada barra.

O comprimento final das barras é dado por:

$$l_1 = l_0(1 + \alpha_1 \Delta T)$$

$$l_2 = l_0(1 + \alpha_2 \Delta T)$$

Considerando, sem perda de generalidade,  $\alpha_2 > \alpha_1$ , a barra exterior será aquela com material de coeficiente  $\alpha_2$  já que essa apresentará o maior comprimento após o aquecimento.

$$\theta = \frac{\text{arco}}{\text{raio}}$$



$$\theta = \frac{R + \frac{d}{2}}{l_1} = \frac{R + \frac{3d}{2}}{l_2}$$

$$\theta = \frac{d}{l_2 - l_1} = \frac{d}{l_0 \Delta T (\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Se  $\alpha_1 > \alpha_2$  apenas teríamos  $\alpha_1$  trocado por  $\alpha_2$  no resultado, logo, de forma geral, temos:

$$\theta = \frac{d}{l_0 \Delta T |\alpha_2 - \alpha_1|}$$

Se a tira fosse resfriada pela mesma variação de temperatura teríamos o mesmo angular e uma curvatura para o outro lado, já que agora a barra que tem maior coeficiente (a de maior comprimento no aquecimento) sofrerá a maior contração e será a barra de menor comprimento e, portanto, a barra no interior do arco.

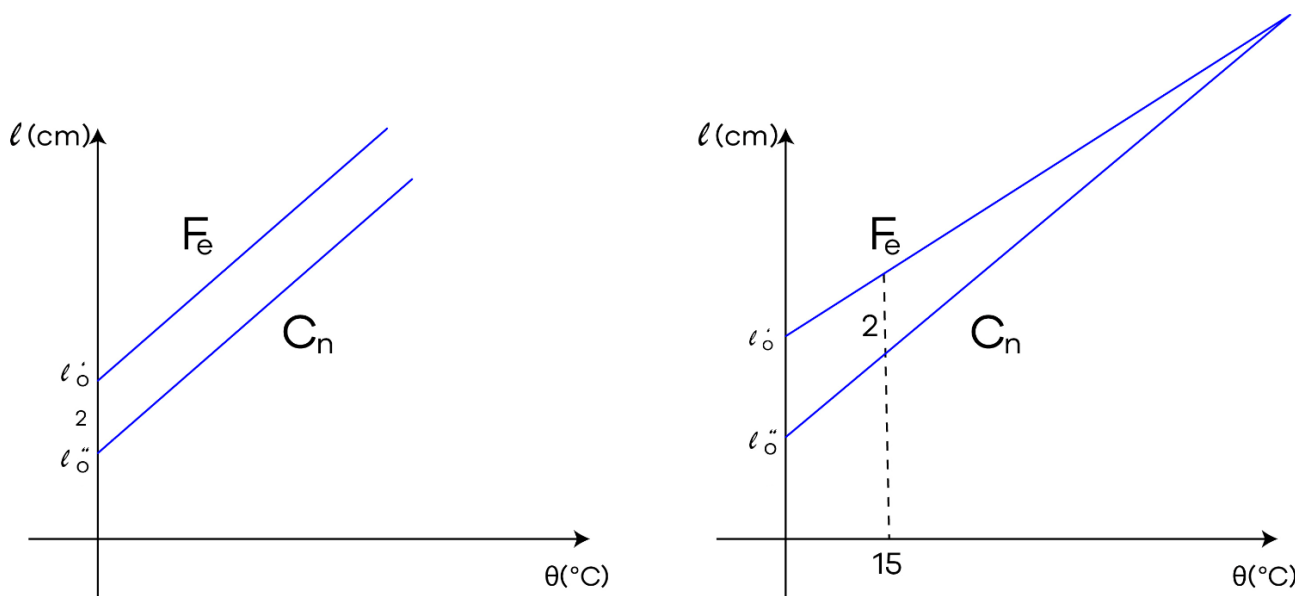
**Gabarito:**  $\theta = \frac{d}{l_0 \Delta T |\alpha_2 - \alpha_1|}$ , curvatura se inverte.

#### 41. (Saraeva)

Determinar o comprimento de uma régua de ferro e de uma régua de cobre  $l'_0$  e  $l''_0$ , a  $t = 0^\circ\text{C}$ , se a diferença das mesmas para  $t_1 = 50^\circ\text{C}$  e  $t_2 = 450^\circ\text{C}$  são iguais em módulo e iguais a  $\Delta l = 2\text{ cm}$ . O coeficiente de dilatação linear do ferro é  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , do cobre é  $\alpha_2 = 17 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### Comentários:

Existem duas possibilidades:



Configuração 1

Configuração 2





Os comprimentos variam linearmente com a temperatura, assim a mesma diferença não pode ocorrer para duas temperaturas diferentes, a não ser que as retas sejam paralelas ou essa diferença seja em módulo, assim, temos as configurações 1 e 2 respectivamente, representadas acima.

### Configuração 1:

O comprimento das réguas é dado por:

$$l_1(\theta) = l'_0(1 + \alpha_1\theta)$$

$$l_2 = l''_0(1 + \alpha_2\theta)$$

As equações acima representam retas e, como vimos, os seus coeficientes angulares devem ser iguais:

$$l'_0\alpha_1 = l''_0\alpha_2$$

$$l''_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}l'_0 = \frac{12}{17}l'_0 \quad (\text{eq. 1})$$

Pelo enunciado, a diferença de comprimento das barras é 2 cm em duas temperaturas e como nessa configuração essa diferença é constante, também teremos ela a 0 °C:

$$l'_0 - l''_0 = 2 \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$l'_0 = 6,8 \text{ cm}$$

$$l''_0 = 4,8 \text{ cm}$$

### Configuração 2:

Considere a variação dos comprimentos das barras em relação a um comprimento inicial em  $t = 0$  °C:

$$\Delta l_1(50) = l'_0\alpha_1 50$$

$$l_1(50) = l'_0(1 + \alpha_1 50) \quad (\text{eq. 1})$$

$$\Delta l_1(450) = l'_0\alpha_1 450$$

$$l_1(450) = l'_0(1 + \alpha_1 450) \quad (\text{eq. 2})$$

$$\Delta l_2(50) = l''_0\alpha_2 50$$

$$l_2(50) = l''_0(1 + \alpha_2 50) \quad (\text{eq. 3})$$

$$\Delta l_2(450) = l''_0\alpha_2 450$$

$$l_2(450) = l''_0(1 + \alpha_2 450) \quad (\text{eq. 4})$$

Temos as seguintes equações do enunciado:

$$l_1(50) - l_2(50) = 2 \quad (\text{eq. 5})$$

$$l_2(450) - l_1(450) = 2 \quad (\text{eq. 6})$$



Substituindo (1) e (3) em (5), temos:

$$l'_0(1 + 50\alpha_1) - l''_0(1 + 50\alpha_2) = 2 \quad (\text{eq. 7})$$
$$1,0006l'_0 - 1,00085l''_0 = 2$$

Substituindo (2) e (4) em (6), temos:

$$-l'_0(1 + 450\alpha_1) + l''_0(1 + 450\alpha_2) = 2 \quad (\text{eq. 8})$$
$$-1,0054l'_0 + 1,00765l''_0 = 2$$

Resolvendo o sistema de equações formado por (7) e (8), obtemos:

$$l'_0 = 2008,5 \text{ cm}$$
$$l''_0 = 2006 \text{ cm}$$

**Gabarito: 6,8 cm; 4,8 cm; 2008,5 cm; 2006 cm.**

#### 42. Saraeva

À temperatura  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ , colocam em um balão de vidro  $m_0 = 100 \text{ g}$  de mercúrio. Para  $t_1 = 20^\circ\text{C}$  colocam no balão  $m_1 = 99,7 \text{ g}$  de mercúrio. (Em ambos os casos considerar a temperatura do mercúrio igual à temperatura do balão.) Encontrar, por meio desses dados, o coeficiente de dilatação linear do vidro  $\alpha$ , sabendo que o coeficiente de expansão volumétrica do mercúrio é  $\beta_1 = 18 \cdot 10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### Comentários:

A densidade do mercúrio varia com a temperatura. Considere que a massa se mantém constante independente da temperatura, logo:

$$\rho = \frac{m}{V}$$
$$\rho_0 V_0 = \rho_f V_f$$

Para uma variação de temperatura  $\Delta\theta$ , teremos:

$$V_f = V_0(1 + \beta_1 \Delta\theta)$$
$$\rho_f = \frac{\rho_0}{1 + \beta_1 \Delta\theta} \quad (\text{eq. 1})$$

Considere o volume inicial do balão de vidro, de acordo com a massa de mercúrio que ele comporta:

$$V_{0, \text{ balão}} = \frac{m_0}{\rho_0} \quad (\text{eq. 2})$$

Do mesmo modo, o volume final deve ser dado por:

$$V_{f, \text{ balão}} = \frac{m_1}{\rho_f} \quad (\text{eq. 3})$$

Dividindo (3) por (2), obtemos:



$$\frac{V_{f, \text{ bal\~{a}o}}}{V_{0, \text{ bal\~{a}o}}} = \frac{m_1 \rho_0}{m_0 \rho_f}$$

Substituindo (1) na equação acima, temos:

$$\frac{V_{f, \text{ bal\~{a}o}}}{V_{0, \text{ bal\~{a}o}}} = \frac{m_1}{m_0} (1 + \beta_1 \Delta\theta) \quad (\text{eq. 4})$$

A equação de dilatação volumétrica do balão é dada por:

$$\begin{aligned} \Delta V_{\text{bal\~{a}o}} &= V_{0, \text{ bal\~{a}o}} \beta_{\text{vidro}} \Delta\theta \\ V_{f, \text{ bal\~{a}o}} &= V_{0, \text{ bal\~{a}o}} (1 + \beta_{\text{vidro}} \Delta\theta) \end{aligned}$$

Assumindo uma variação pequena, podemos escrever  $\beta_{\text{vidro}} = 3\alpha$ , assim:

$$\frac{V_{f, \text{ bal\~{a}o}}}{V_{0, \text{ bal\~{a}o}}} = (1 + 3\alpha \Delta\theta)$$

Substituindo (4) na equação acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_0} (1 + \beta_1 \Delta\theta) &= (1 + 3\alpha \Delta\theta) \\ 3\alpha \cdot 20 &= 5,892 \cdot 10^{-4} \\ \alpha &= 9,82 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1} \end{aligned}$$

**Gabarito:**  $\alpha = 9,82 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

### 43. (Saraeva)

Um relógio, com pêndulo metálico, adianta  $\tau_1 = 5 \text{ s}$  por dia a uma temperatura  $t_1 = +15 \text{ } ^\circ\text{C}$  e atrasa  $\tau_2 = 10 \text{ s}$  por dia a uma temperatura  $t_2 = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Encontrar o coeficiente  $\alpha$  de dilatação térmica do metal do pêndulo, considerando, que o período de oscilação do pêndulo

$$\text{é } T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

#### Comentários:

Seja  $n$  o número de ciclos que o relógio faz durante um dia, então:

$$\Delta\tau = \frac{\tau}{n}$$

Onde  $\Delta\tau$  é o atraso por ciclo e  $\tau$  o atraso diário.

Assim, temos:

$$T_0 + \Delta\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Usando a expressão de comprimento em função da temperatura, onde foi considerado o comprimento  $l_0$  e temperatura  $\theta_0$  correspondente ao padrão que rende  $24h$  em um dia.



$$T_0 + \frac{\tau}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l_0}{g}} (1 + \alpha(\theta - \theta_0))$$

$$nT_0 + \tau = 2\pi n \sqrt{\frac{l_0}{g}} \sqrt{1 + \alpha(\theta - \theta_0)} = nT_0 \sqrt{1 + \alpha(\theta - \theta_0)}$$

$$T_{dia} + \tau = T_{dia} \sqrt{1 + \alpha(\theta - \theta_0)} \quad (eq.1)$$

Usando (1) com as temperaturas do enunciado, obtemos: ( $T_{dia} = 86400$  s)

$$\alpha(15 - \theta_0) = \left(\frac{86405}{86400}\right)^2$$

$$\alpha(30 - \theta_0) = \left(\frac{86410}{86400}\right)^2$$

Subtraindo as equações acima, temos:

$$15\alpha = \left(\frac{86410}{86400}\right)^2 - \left(\frac{86405}{86400}\right)^2$$
$$\alpha \approx 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

**Gabarito:**  $\alpha \approx 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### 44. Saraeva

Em uma roda de madeira de diâmetro 100 cm, é necessário adaptar um anel de ferro, cujo diâmetro é de 5 mm menor que o diâmetro da roda. Em quantos graus é necessário elevar a temperatura do anel? O coeficiente de dilatação linear do ferro é  $\alpha_1 = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### Comentários:

O comprimento inicial do diâmetro do anel é dado por:

$$d_0 = 100 - 0,5 = 99,5 \text{ cm}$$

A expressão que relaciona a variação de comprimento com a de temperatura é dada abaixo:

$$\Delta d = d_0 \alpha_1 \Delta \theta$$

Como o comprimento inicial do diâmetro do anel de ferro é 5 mm a menos que o da roda, devemos aumentá-lo de 5 mm (0,5 cm):

$$0,5 = 99,5 \cdot 12 \cdot 10^{-6} \Delta \theta$$
$$\Delta \theta \approx 418,8 \text{ } ^\circ\text{C}$$

**Gabarito:** 418,8 °C.



#### 45. Zubov

A escala de latão de um barômetro de mercúrio está a  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . A  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$  o barômetro indica uma pressão de  $760\text{ mmHg}$ . Deduza a leitura do barômetro para  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ . O coeficiente de dilatação linear do latão é  $\alpha = 1,9 \cdot 10^{-5}$  e o coeficiente de dilatação volumétrica do mercúrio é  $\beta = 1,8 \cdot 10^{-4}$ .

#### Comentários:

Inicialmente, a  $18\text{ }^{\circ}\text{C}$  temos:

$$V_0 = A_{0,escala} h_0 \quad (eq. 1)$$

Onde  $V_0$  é o volume inicial de mercúrio e  $A_{0,escala}$  é a área de secção inicial da escala.

A  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , teremos:

$$V = A_{escala} h \quad (eq. 2)$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$h = h_0 \frac{V}{V_0} \frac{A_{0,escala}}{A_{escala}} \quad (eq. 3)$$

Das equações de dilatação térmica, temos:

$$V = V_0(1 + \beta\Delta\theta) \quad (eq. 4)$$

$$A_{escala} = A_{0,escala}(1 + 2\alpha\Delta\theta) \quad (eq. 5)$$

Onde o coeficiente de dilatação superficial foi considerado  $2\alpha$ , sendo essa aproximação válida para pequenas variações na área comparadas à área original.

Substituindo (4) e (5) em (3), obtemos:

$$h = h_0 \frac{1 + \beta\Delta\theta}{1 + 2\alpha\Delta\theta}$$

$$h = 760 \cdot \frac{1,00324}{1,000684}$$

$$h \approx 761,96\text{ mm}$$

**Gabarito: 761,96 mm.**



## 7. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Revise os conceitos de Escalas Termométricas e Dilatometria.

Não deixe dúvidas nas resoluções dos exercícios. Resolva todos do seu vestibular, mas cuidado. Não perca o foco do seu vestibular.

Na próxima aula, continuaremos com Termologia. Estudaremos calorimetria e diagramas de fases, preparando nossos conceitos para termodinâmica, assunto muito importante nos nossos vestibulares.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto



## 8. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 3. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 357p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.
- [6] Paul A. Tipler, Gene Mosca. Física para Cientistas e Engenheiros volume 2. 5ª ed. LTC, 2006. 499 f.
- [7] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p.



## 9. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	15/05/2019

