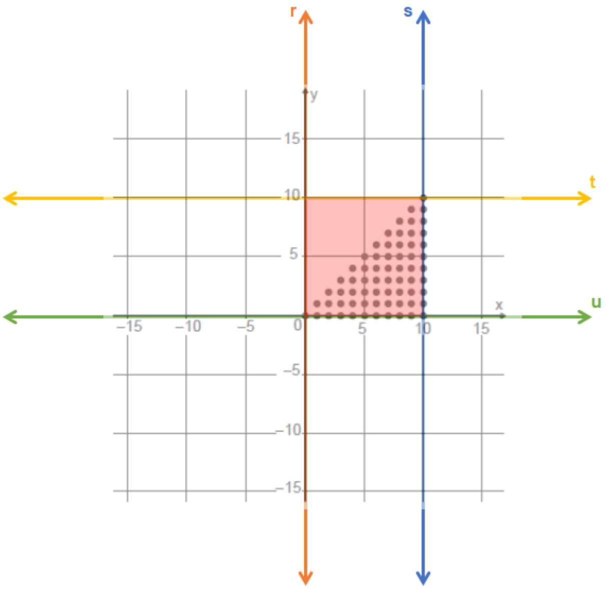
Resolução – Treinamento ENEM
S05.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 01 ==

Primeiro, refazendo a figura da questão com alguma retas (r, s, t, u) marcando a região onde se encontra a figura na forma de um triângulo, e destacando essa área com vermelho:



Escrevendo as equações das retas destacadas:

r)

$r : x = 0$

s)

$s : x = 10$

t)

$t : y = 10$

u)

$u : y = 0$

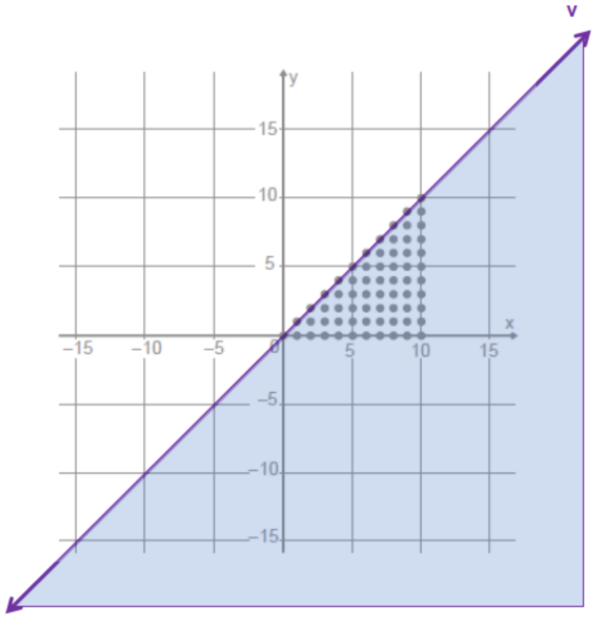
Podemos indicar a região quadrada indicada de vermelho entre as retas pelas seguintes inequações (a partir das equações acima):

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \geq 0 \\ y \leq 10 \end{cases}$$

Juntando as inequações em cada variável (x e y), obtemos:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \text{ (I)} \\ 0 \leq y \leq 10 \text{ (II)} \end{cases}$$

Agora, devemos achar uma relação entre x e y. Para isso, destacamos a seguinte reta (v) na figura, representada abaixo:



Escrevendo a equação da reta destacada:

v)

$v : y = x$

Indicando a região destacada abaixo da reta v (em roxo) onde se encontra o conjunto de pontos na forma de um triângulo por uma inequação, temos:

$y \leq x$ (III)

Pois todos os pontos estão abaixo da reta y = x.

Juntando as inequações (I), (II) e (III) em apenas uma inequação.

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 10 \text{ (I)} \\ 0 \leq y \leq 10 \text{ (II)} \\ y \leq x \text{ (III)} \end{cases}$$

$$0 \leq y \leq x \leq 10$$

Com isso chegamos na relação entre x e y que destaca a localização dos pontos da figura.

Resposta: Letra B.

Item 02 ==

Em uma função trigonométrica do mesmo tipo dessa questão,

$$P(t) = A + B\cos(kt)$$

cada um dos parâmetros (A, B e k) vai indicar o seguinte:

A: indica o valor médio entre os valores máximos e mínimos da função.

No caso em questão indicará a pressão arterial média entre a pressão máxima e mínima. (As vezes também é chamada de linha média)

$$A = \frac{P_{máxima} + P_{mínima}}{2}$$

$$A = \frac{120 + 78}{2}$$

$$A = \frac{198}{2} = 99$$

B: indica a amplitude dos valores da função, isto é, a diferença entre o valor máximo e mínimo dividido por 2.

No caso do item, será a pressão máxima menos a pressão mínima dividido por 2.

$$B = \frac{P_{máxima} - P_{mínima}}{2}$$

$$B = \frac{120 - 78}{2}$$

$$B = \frac{42}{2} = 21$$

k: indica o período da função, ou ainda a frequência, já que podemos estabelecer uma relação entre período e frequência, um é o inverso do outro. A relação entre k e o período (T) será da seguinte forma:

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

E a relação com a frequência (f), será:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}$$

$$k = 2\pi f$$

No item, o período é justamente o intervalo de tempo entre duas sucessivas pressões máximas, ou um batimento cardíaco. Logo, o número de batimento cardíacos por minutos, será nossa frequência. Como t representa a variável tempo, medida em segundo, devemos transformar nossa frequência para essa medida também:

$$f = \frac{90}{1\text{min}} = \frac{90}{60\,s} = \frac{9}{6\,s} = \frac{3}{2\,s}$$

Calculando o k:

$$k = 2\pi f$$

$$k = 2\pi \cdot \frac{3}{2}$$

$$k = 3\pi$$

Substituindo os parâmetros A, B e k na função P(t):

$$P(t) = A + B\cos(kt) \rightarrow P(t) = 99 + 21\cos(3\pi t)$$

Resposta: Letra A.

Item 03 ==

A produção do determinado produto será da seguinte forma, em cada ano:

<u>Ano 1 (t = 1):</u>

$$P = 8000$$

<u>Ano 2 (t = 2):</u>

$$P = 8000 + 50\% \cdot 8000$$

$$P = \boxed{8000} + \frac{50}{100} \cdot \boxed{8000}$$

Colocando $\boxed{8000}$ em evidência:

$$P = 8000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)$$

$$P = 8000 \cdot (1 + 0,5)$$

$$P = 8000 \cdot (1,5)$$

$$P = 12000$$

$$**P = 8000 \cdot (1,5) = 8000 \cdot (1,5)^1 = 8000 \cdot (1,5)^{2-1}$$

<u>Ano 3 (t = 3):</u>

$$P = 8000 + 50\% \cdot 8000 + 50\% \cdot (8000 + 50\% \cdot 8000)$$

$$P = \boxed{8000} + \frac{50}{100} \cdot \boxed{8000} + \frac{50}{100} \cdot \left(8000 + \frac{50}{100} \cdot 8000\right)$$

Colocando $\boxed{8000}$ em evidência:

$$P = 8000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right) + \frac{50}{100} \cdot \left(\boxed{8000} + \frac{50}{100} \cdot \boxed{8000}\right)$$

Colocando $\boxed{8000}$ novamente em evidência:

$$P = \boxed{8000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)} + \frac{50}{100} \cdot \boxed{8000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)}$$

Colocando $\boxed{8000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)}$ em evidência:

$$P = 8000 \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{50}{100}\right)$$

$$P = 8000 \cdot (1 + 0,5) \cdot (1 + 0,5)$$

$$P = 8000 \cdot (1 + 0,5)^2$$

$$P = 8000 \cdot (1,5)^2$$

$$P = 8000 \cdot 2,25 = 18000$$

$$**P = 8000 \cdot (1,5)^2 = 8000 \cdot (1,5)^{3-1}$$

Generalizando para qualquer ano t:

<u>Ano t (t = t):</u>

$$P = 8000 \cdot (1,5)^{t-1}$$

O que temos então é uma progressão geométrica (P.G.) com primeiro termo $a_1 = 8000$ e razão $q = 1,5$.

Resposta: Letra E.

Item 04 ==

Nessa questão, devemos achar o valor máximo da temperatura T(h) no interior da estufa. A temperatura é dada por uma função do 2º grau, ou seja, uma parábola.

Podemos achar quanto vale o $T(h)_{máximo}$, calculando o "x do vértice", o qual, para a função T(h) na verdade seria um h do vértice (h_v).

A fórmula geral para o "x do vértice" em uma função do 2º grau da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ é dada por $x_v = \frac{-b}{2a}$, logo, para a função $T(h) = -h^2 + 22h - 85$, teremos:

$$x_v = h_v = \frac{-b}{2a}$$

$$h_v = \frac{-22}{2 \cdot (-1)}$$

$$h_v = \frac{-22}{-2} = 11$$

Substituindo o h_v achado na função T(h) acharemos o valor máximo correspondente, ou chamado também de "y do vértice".

$$y_v = T(h)_{máximo} = T(11) = -11^2 + 22 \cdot 11 - 85$$

$$T(h)_{máximo} = -121 + 242 - 85$$

$$T(h)_{máximo} = 121 - 85$$

$$T(h)_{máximo} = 36^o\,C$$

Olhando a tabela, vemos que a temperatura de 36º C corresponde a uma temperatura Alta.

Resposta: Letra D.

Item 05 ==

Inicialmente, o financiamento está feito em N parcelas iguais e o valor de cada parcela é V. Dessa forma o custo total do financiamento desse imóvel (T) será a multiplicação do número de parcelas pelo valor de cada parcela:

$$T = N \cdot V \text{ (I)}$$

Quando o cliente aumenta o prazo, as parcelas são: N + 5

E o valor de cada parcela é: V – 200

Dessa forma, o total do financiamento (T) pode ser reescrito como:

$$T = (N + 5) \cdot (V - 200) \text{ (II)}$$

Pois o valor do financiamento será o mesmo.

Quando o cliente diminui o prazo, as parcelas são: N – 4

E o valor de cada parcela é: V + 232

Dessa forma, o total do financiamento (T) pode ser reescrito como:

$$T = (N - 4) \cdot (V + 232) \text{ (III)}$$

Pois o valor do financiamento será o mesmo.

Juntando (I), (II) e (III) em uma sistema de equações:

$$\begin{cases} T = N \cdot V \\ T = (N + 5) \cdot (V - 200) \\ T = (N - 4) \cdot (V + 232) \end{cases}$$

Abrindo as duas equações de baixo:

$$T = (N + 5) \cdot (V - 200)$$

$$T = N \cdot V - 200 \cdot N + 5 \cdot V - 1000$$

$$(T = N \cdot V)$$

$(T = N \cdot V)$

$N \cdot V = N \cdot V - 200 \cdot N + 5 \cdot V - 1000$

$0 = -200N + 5V - 1000$

$5V - 200N = 1000\ (*)$

$T = (N - 4) \cdot (V + 232)$

$T = N \cdot V + 232 \cdot N - 4 \cdot V - 928$

$(T = N \cdot V)$

$N \cdot V = N \cdot V + 232 \cdot N - 4 \cdot V - 928$

$0 = 232N - 4V - 928$

$-4V + 232N = 928\ (**)$

Juntando (*) e (**):

$$\begin{cases} 5V - 200N = 1000 \\ -4V + 232N = 928 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 5V - 200N = 1000\ (\times 4) \\ -4V + 232N = 928\ (\times 5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20V - 800N = 4000 \\ -20V + 1160N = 4640 \end{cases}$$

Somando as duas equações, para “cancelar” o V e continuando a resolver.

$-800N + 1160N = 4000 + 4640$

$360N = 8640$

$36N = 864$

$N = \frac{864}{36} = \frac{432}{18} = \frac{216}{9} = \frac{72}{3} = 24$

$N = 24$

Substituindo o valor achado N em (*)

$5V - 200N = 1000$

$5V - 200 \cdot 24 = 1000$

$5V - 4800 = 1000$

$5V = 1000 + 4800$

$5V = 5800$

$V = \frac{5800}{5} = 1160$

Resposta: Letra B.

Item 06 ==

Primeiramente, precisamos descobrir a área ocupada pela piscina já existente, já que esse valor é o limite para a área da nova piscina. A piscina já existente tem dimensões 50 x 24 m e é retangular, logo sua área será:

$$\text{Área}_{\text{limite}} = 50 \times 24$$
$$\text{Área}_{\text{limite}} = 1200\text{m}^2$$

E a área da nova piscina deve ser menor que esse valor. Essa área da nova piscina é a soma de três setores circulares iguais com ângulo central de 60°. A área de cada um desses setores será:

$$\frac{60}{360} \cdot \pi \cdot R^2$$

Com isso, nós podemos descobrir qual seria o valor do raio que igualaria a área da nova piscina à antiga:

$$3\left(\frac{60}{360} \cdot \pi \cdot R^2\right) = 1200$$
$$\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot R^2 = 400$$
$$\frac{R^2}{2} = 400$$
$$R^2 = 400 \cdot 2$$
$$R = \sqrt{400 \cdot 2}$$
$$R = 20\sqrt{2}$$

O proprietário disse que R precisa ser um valor inteiro, então primeiro vamos aproximar um valor para raiz de 2:

$$R = 20 \cdot 1{,}41$$
$$R = 28{,}2$$

E o maior valor inteiro possível é 28 m, **Letra B.**

Item 07 ==

Uma questão de função bem direta, o que a gente precisa fazer é igualar o valor da parcela a 400 reais e ver quantas prestações n vão ser necessárias.

$$P = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{\left(1{,}013^n - 1\right)}$$

$$400 = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{\left(1{,}013^n - 1\right)}$$

$$400\left(1{,}013^n - 1\right) = 5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013$$

$$400 \times 1{,}013^n - 400 = 65 \times 1{,}013^n$$

$$335 \times 1{,}013^n = 400$$

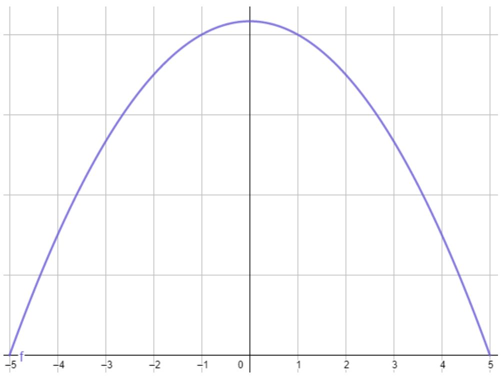
Agora, aplicamos log dos dois lados para usarmos as aproximações que o enunciado deu e encontrarmos n:

$$\log\left(335\times1{,}013^{n}\right)=\log(400)$$
$$\log335+\log1{,}013^{n}=\log400$$
$$\log335+n\times\log1{,}013=\log400$$
$$2{,}525+n\times0{,}005=2{,}602$$
$$n\times0{,}005=0{,}077$$
$$n\times5=77$$
$$n=15{,}4$$

Entretanto, o número de parcelas precisa ser um número inteiro, e sabemos que se dividirmos uma compra em mais parcelas, ela fica mais barata, então para garantir que o valor não ultrapasse 400 reais, o número de prestações precisa ser maior que 15,4. Ficamos então com a resposta 16 parcelas, **Letra D.**

Item 08 ==

A questão nos deu uma parábola e alguns de seus pontos, mas não estabeleceu nenhum eixo de coordenadas. A gente pode definir então um eixo que vai deixar os cálculos bem simples: o eixo x vai corresponder ao chão e o y vai corresponder ao eixo de simetria da parábola:



A distância entre o eixo de simetria da igreja e o ponto que ela toca o chão é 5, logo as duas raízes são justamente 5 e -5. Com isso, na forma fatorada, nossa função fica assim:

$$y=a(x-5)(x+5)$$

Agora, para achar o *a* nós precisamos substituir o x e o y por algum ponto. A imagem da questão também nos mostra que a porta da igreja vai até 4 metros a direita do eixo de simetria e tem altura de 3 metros. Ou seja, quando o nosso x é 4, nosso y é 3, e podemos substituir esse ponto na função:

$$3=a(4-5)(4+5)$$
$$3=a(-1)(9)$$
$$a=\frac{3}{-9}$$
$$a=-\frac{1}{3}$$

E agora nós conhecemos a função inteira. A questão nos pede a altura total da igreja, e se olharmos no nosso gráfico, isso acontecerá no x = 0, então basta a gente substituir esse valor no x:

$$y=-\frac{1}{3}(x-5)(x+5)$$
$$h=-\frac{1}{3}(0-5)(0+5)$$
$$h=-\frac{(-25)}{3}$$
$$h=\frac{25}{3}$$

E ficamos com a **Letra D.**

Item 09 ==

Usando a expressão que a questão nos deu:

$$M(t)=A\cdot(2{,}7)^{kt}$$

A questão nos pede que consideremos que a massa será reduzida a 10% da original, logo M será igual a 10% de A, e vamos encontrar o tempo correspondente:

$$10\%\cdot\cancel{A}=\cancel{A}\cdot(2{,}7)^{kt}$$
$$\frac{1}{10}=2{,}7^{kt}$$

E chegamos a um problema, já que temos apenas uma equação, mas duas incógnitas. Pra resolver isso, vamos usar o fato que nós sabemos a meia-vida do Césio (30 anos), então podemos substituir na equação:

$$\frac{A}{2}=A\cdot(2{,}7)^{k\cdot30}$$
$$\frac{1}{2}=2{,}7^{k\cdot30}$$
$$\left(2{,}7^{k}\right)^{30}=\frac{1}{2}$$
$$2{,}7^{k}=\sqrt[30]{\frac{1}{2}}$$

E podemos substituir esse valor para $2{,}7^{k}$ na primeira equação:

$$\frac{1}{10}=2{,}7^{kt}$$
$$\frac{1}{10}=\left(\sqrt[30]{\frac{1}{2}}\right)^{t}$$

Agora vem umas continhas com log, mas a questão já tá praticamente terminada:

$$\frac{1}{10}=\left(\sqrt[30]{\frac{1}{2}}\right)^{t}$$

$$\log\frac{1}{10}=\log\left(\sqrt[30]{\frac{1}{2}}\right)^{t}$$

$$\log 1-\log 10=\frac{t}{30}\cdot\log\frac{1}{2}$$

$$\log 1-\log 10=\frac{t}{30}\cdot(\log 1-\log 2)$$

$$0-1=\frac{t}{30}\cdot(0-0,3)$$

$$-30=t\cdot(-0,3)$$

$$t=\frac{30}{0,3}$$

$$t=100$$

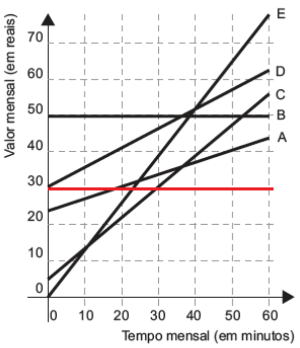
E ficamos com a **Letra E.**

E se eu te falar que tem como resolver essa pergunta em 20 segundos, sem usar nada de logaritmo?

É só pensar o seguinte, se a meia vida da substância é 30 anos, logo, a cada 30 anos sua quantidade cai pela metade. Ou seja, depois de 30 anos, a quantidade encontrada será 50%, depois de 60 anos, será 25%, depois de 90 anos, será 12,5%. Portanto, necessariamente nossa resposta precisa ser um número maior que 90, para que ainda mais da substância seja degradada e alcance a marca de 10%, e a única alternativa que se encaixa é a **Letra E.**

Item 10 ==

Essa questão requer apenas uma análise de gráfico bem direta. O que a gente precisa fazer é imaginar uma linha horizontal na marca dos R$30,00, e conferir qual das 5 operadoras tem um tempo mensal maior nessa marca:



É notável que nossa resposta não será a companhia B (que sempre custa 50 reais, então não condiz com a condição do cliente) nem a companhia D (já que a marca de 30 reais é o início da reta, logo o tempo mensal está em 0 minuto.

Entre as companhias A, C e E, precisamos olhar qual tem um maior mensal, e vai ser a que cortar a linha vermelha mais a direita. Nossa resposta é a **Letra C**, que corta a linha de 30 reais no ponto correspondente a 30 minutos de ligação.

Item 11 ==

Primeiro vamos descobrir a amplitude do movimento vertical do solo para os terremotos no Japão e na Argentina, obtendo:

- Japão:

$$R=\log\left(\frac{A}{A_0}\right)\rightarrow 9=\log\left(\frac{A_{Japão}}{A_0}\right)$$

$$10^9=10^{\log\left(\frac{A_{Japão}}{A_0}\right)}\rightarrow 10^9=\left(\frac{A_{Japão}}{A_0}\right)$$

$$A_{Japão}=10^9\cdot A_0$$

- Argentina:

$$R=\log\left(\frac{A}{A_0}\right)\rightarrow 7=\log\left(\frac{A_{Argentina}}{A_0}\right)$$

$$10^7=10^{\log\left(\frac{A_{Argentina}}{A_0}\right)}\rightarrow 10^7=\left(\frac{A_{Argentina}}{A_0}\right)$$

$$A_{Argentina}=10^7\cdot A_0$$

Calculando agora a razão (r) entre as amplitudes dos movimentos verticais dos terremotos do Japão e da Argentina, obtendo:

$$r=\frac{A_{Japão}}{A_{Argentina}}\rightarrow r=\frac{10^9\cdot A_0}{10^7\cdot A_0}$$

$$r=\frac{10^7\cdot 10^2}{10^7}\rightarrow r=10^2\rightarrow r=100$$

Resposta: Letra D.

Resolução – Treinamento ENEM
S05.L2 – Prof. Fredão e Prof. Gabriel Lobo

Item 12 ==

Para resolvermos essa questão vamos comparar a intensidade das forças duas a duas, obtendo:

- Intensidade das forças que os satélites A e C sofrem:

Pelo gráfico esses satélites possuem as mesmas massas e suas forças são:

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{k \cdot m}{{r_A}^2} \\ F_C = \dfrac{k \cdot m}{{r_C}^2} \end{cases} \Rightarrow como\ r_A < r_c \Rightarrow F_A > F_C$$

- Intensidade das forças que os satélites A e B sofrem:

Pelo gráfico esses satélites possuem os mesmos raios de órbita e suas forças são:

$$\begin{cases} F_A = \dfrac{k \cdot m_A}{r^2} \\ F_B = \dfrac{k \cdot m_B}{r^2} \end{cases} \Rightarrow como\ m_B > m_A \Rightarrow F_B > F_A$$

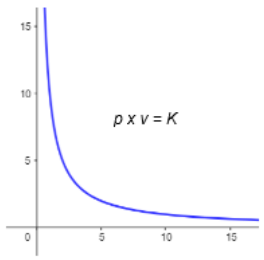
Assim, as forças que os satélites A, B e C sofrem seguem a seguinte relação:

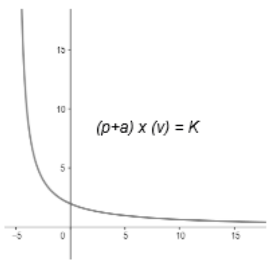
$$F_C < F_A < F_B$$

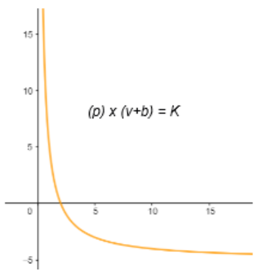
Resposta: Letra E.

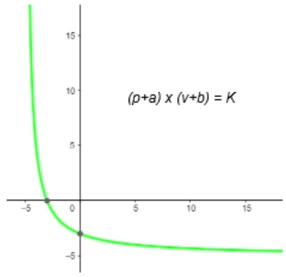
Item 13 ==

Para resolvermos essa questão é importante percebermos que como a, b e K são constantes e ainda que com $K > 0$, podemos rescrever a equação dada como $p \cdot v = K$, sendo os valores das constantes a e b iguais a 0. Com isso percebemos que a equação obtida é idêntica a equação de grandezas inversamente proporcionais e como já vimos antes, grandezas inversamente proporcionais tem seu gráfico associado a um ramo de hipérbole. Assim, o gráfico da equação que o fisioterapeuta utilizou é um ramo de hipérbole e os valores das constantes a e b, apenas provocam deslocamentos horizontais e verticais nesse ramo de hipérbole como vemos abaixo.









Resposta: Letra E.

Item 14 ==

Como o cilindro de madeira tem como diâmetro d, por consequência seu raio é:

$$raio = \frac{diâmetro}{2} \rightarrow raio = \frac{d}{2}$$

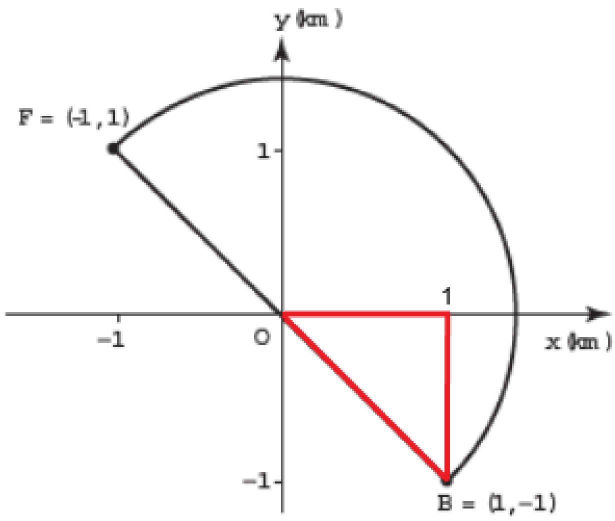
Agora para medirmos o comprimento da folha devemos igualar ele a 5 voltas do comprimento do cilindro de madeira, uma vez que não devemos considerar a espessura da folha, assim obtemos que o comprimento da folha é:

$$comprimento\ folha = n^o\ de\ voltas \cdot comprimento\ cilindro$$
$$comprimento\ folha = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$
$$comprimento\ folha = 5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{2}$$
$$comprimento\ folha = 5\pi d$$

Resposta: Letra D.

Item 15 ==

Primeiro vamos calcular a distância BO que é o raio da semicircunferência e também metade da distância em linha reta, como podemos perceber pela imagem abaixo, obtemos que essa distância BO é de:



$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$OB^2 = 1^2 + 1^2 \rightarrow OB^2 = 1 + 1$$
$$OB^2 = 2 \rightarrow OB = \sqrt{2}\ km$$

Calculando as distâncias em linha reta e em semicircunferência, obtendo:

- Distância em linha reta:

$$distância\ em\ linha\ reta = 2 \cdot distância\ BO$$
$$distância\ em\ linha\ reta = 2 \cdot \sqrt{2}$$
$$distância\ em\ linha\ reta = 2 \cdot 1.4$$
$$distância\ em\ linha\ reta = 2{,}8\ km\ ou\ 2.800\ metros$$

- Distância em semicircunferência:

$$distância\ em\ semicircunfêrencia = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{2}$$
$$distância\ em\ semicircunfêrencia = \pi \cdot \sqrt{2}$$
$$distância\ em\ semicircunfêrencia = 3 \cdot 1.4$$
$$distância\ em\ semicircunfêrencia = 4{,}2\ km\ ou\ 4.200\ metros$$

Agora vamos calcular o tempo para a construção de cada trajeto, obtendo:

- Tempo para o caminho em linha reta:

$$\frac{tempo\ em\ linha\ reta}{2.800\ metros} = \frac{1 hora}{1 metro}$$
$$tempo\ em\ linha\ reta \cdot 1 = 2.800 \cdot 1$$
$$tempo\ em\ linha\ reta = 2.800\ horas$$

- Tempo para o caminho em semicircunferência:

$$\frac{tempo\ em\ semicircunferência}{4.200\ metros} = \frac{0{,}6\ hora}{1 metro}$$
$$tempo\ em\ semicircunferência \cdot 1 = 4.200 \cdot 0{,}6$$
$$tempo\ em\ semicircunferência = \frac{4.200 \cdot (5+1)}{10}$$
$$tempo\ em\ semicircunferência = 2.100 + 420$$
$$tempo\ em\ semicircunferência = 2.520\ horas$$

Assim, o menor tempo possível para a construção da galeria é 2.520 horas.

Resposta: Letra B.