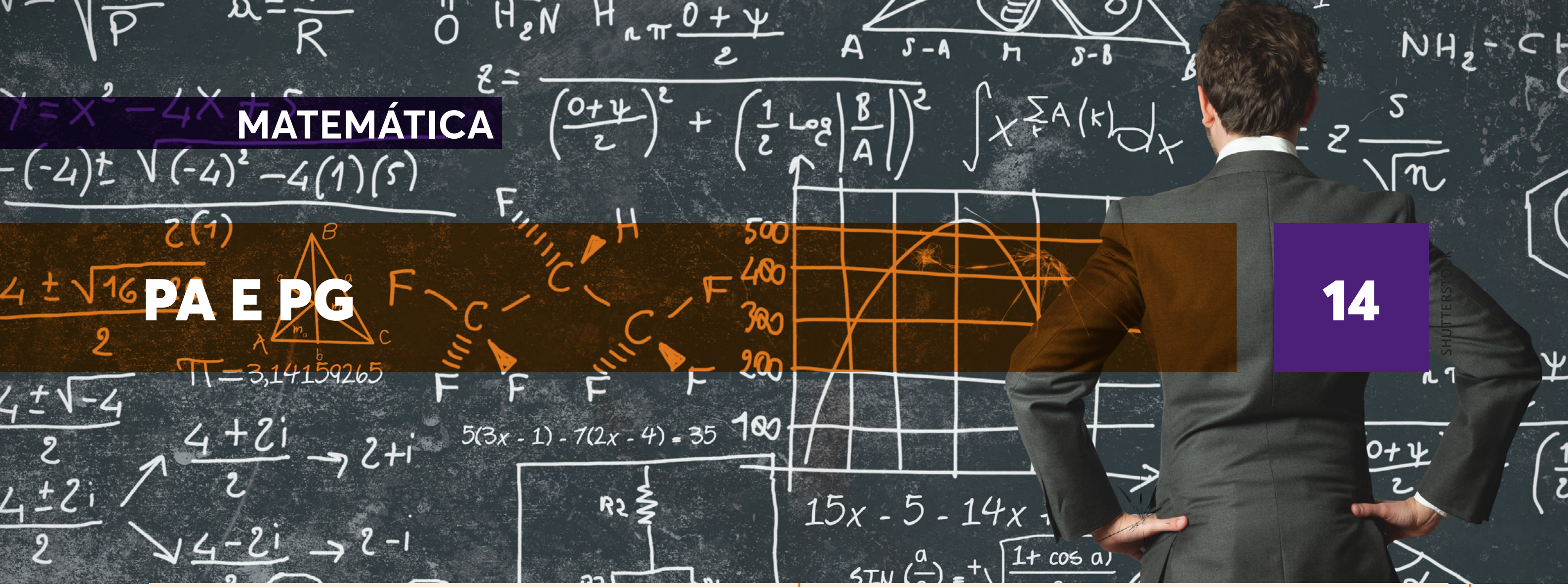
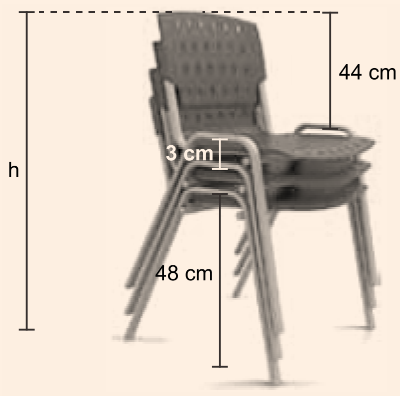


MATEMÁTICA

PA E PG

14

01| A figura indica o empilhamento de três cadeiras idênticas e perfeitamente encaixadas umas nas outras, sendo h a altura da pilha em relação ao chão.



(www.habto.com. Adaptado.)

A altura, em relação ao chão, de uma pilha de n cadeiras perfeitamente encaixadas umas nas outras, será igual a $1{,}4$ m se n for igual a

A 14.

B 17.

C 13.

D 15.

E 18.

02| Uma função f é definida apenas para números naturais, de modo que $f(0) = 8,$ $f(1) = 2$ e $f(n) = \dfrac{f(n-1)}{f(n-2)}$ para $n > 1.$ O valor de $f(50)$ é:

A $\frac{1}{8}$

B $\frac{1}{4}$

C 8

D 2

E 1

03| Um fisioterapeuta elaborou o seguinte plano de treinos diários para o condicionamento de um maratonista que se recupera de uma contusão:

- primeiro dia – corrida de 6 km;

- dias subsequentes – acréscimo de 2 km à corrida de cada dia imediatamente anterior.

O último dia de treino será aquele em que o atleta correr 42 km.

O total percorrido pelo atleta nesse treinamento, do primeiro ao último dia, em quilômetros, corresponde a:

A 414

B 438

C 456

D 484

04| Na tabela de 8 colunas e infinitas linhas numeradas, indicada na figura, podemos formar infinitos quadrados coloridos 3×3, como mostra um exemplo.

		COLUNAS							
		1	2	3	4	5	6	7	8
LINHAS	1	1	2	3	4	5	6	7	8
	2	9	10	11	12	13	14	15	16
	3	17	18	19	20	21	22	23	24
	4	25	26	27	28	29	30	31	32
	5	33	34	35	36	37	38	39	40
	6	41	42	43	44	45	46	47	48
	7	49	50	51	52	53	54	55	56
	8	57	58	59	60	61	62	63	64
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Nessa tabela, o quadrado colorido 3×3 cuja soma dos 9 elementos é igual a 4.806 ocupa três linhas, sendo uma delas a linha

A 71.

B 67.

C 53.

D 49.

E 41.

05| O quadro numérico apresentado a seguir é construído segundo uma lógica estrutural.

1	3	5	7	9	...	101
3	3	5	7	9	...	101
5	5	5	7	9	...	101
7	7	7	7	9	...	101
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮
101	101	101	101	101	...	101

Considerando a lógica estrutural do quadro acima, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que estão na linha de número 41 é

A 4.443.

B 4.241.

C 4.645.

D 4.847.

06| Considere esses quatro valores x, y, $3x$, $2y$ em PA crescente. Se a soma dos extremos é 20, então o terceiro termo é

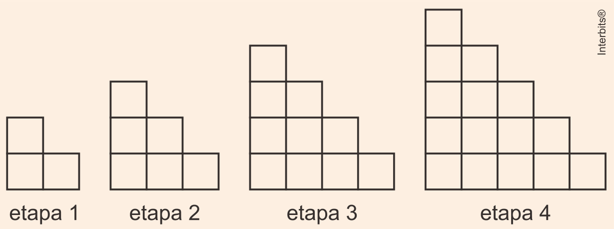
A 9

B 12

C 15

D 18

07| Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.



Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é

A 1.331.

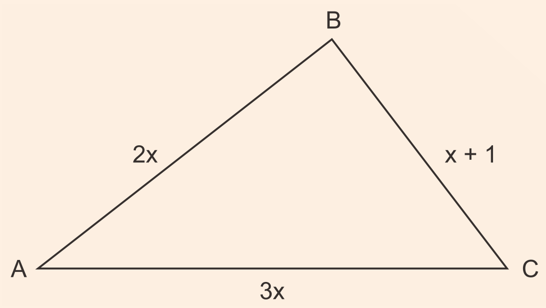
B 3.050.

C 5.050.

D 5.100.

E 5.151.

08| As medidas dos lados AB, BC e CA de um triângulo ABC formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.



Qual é a medida do perímetro desse triângulo?

A 5

B 6

C 7

D 8

E 9

09| Seja a_n uma sequência de números reais cujo termo geral é $a_n = \frac{1}{4} - n, n \in \mathbb{N}$. Qual das afirmações seguintes é **verdadeira**?

A a_n é uma progressão aritmética de razão -1.

B a_n é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

C a_n é uma progressão geométrica de razão 4.

D a_n não é uma progressão (nem geométrica, nem aritmética).

E a_n é simultaneamente uma progressão aritmética e geométrica.

10| Considere a matriz $A_{n\times 9}$ de nove colunas com números inteiros consecutivos, escrita a seguir.

$$A_{n\times 9}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 \\ 28 & 29 & 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Se o número 18.109 é um elemento da última linha, linha de ordem n, o número de linhas dessa matriz é:

A 2.011

B 2.012

C 2.013

D 2.014

11| Na progressão geométrica $(1, 2, 4, 8, \dots)$, sendo a_n o n-ésimo termo e S_n a soma dos n primeiros termos, podemos concluir que:

A $S_n = 2\cdot a_n$

B $S_n = a_n + 1$

C $S_n = a_{n+1} + 1$

D $S_n = a_{n+1} - 1$

E $S_n = 2\cdot a_{n+1}$

12| A sequência numérica c_n é definida como $c_n = a_n \cdot b_n$, com $n \in \mathbb{N}$, em que a_n e b_n são progressões aritmética e geométrica, respectivamente.

Sabendo-se que $a_5 = b_5 = 10$ e as razões a_n e b_n são iguais a 3, o termo c_8 é igual a

A 100

B 520

C 1.350

D 3.800

E 5.130

13| Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(nx) = [f(x)]^n$ para todo número inteiro n e todo número real x. Se $f(1) = 3$, então, o valor da soma $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)$ é

A 4.568.

B 2.734.

C 3.117.

D 3.279.

14| A sequência $(a_1, a_2, \dots, a_{10})$, onde $a_1 = \frac{3}{2}, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{9}{2}, \dots, a_{10} = \frac{1.025}{2}$ é de tal forma que para cada $n \in \{1, 2, \dots, 10\}$ temos que $a_n = b_n + c_n$, onde $(b_1, b_2, \dots, b_{10})$ é uma PG com $b_1 \neq 0$ e de razão $q \neq \pm 1$ e $(c_1, c_2, \dots, c_{10})$ é uma PA constante.

Podemos afirmar que $a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$ é igual a

A 98

B 172

C 260

D 516

E 1.028

15| Uma calculadora possui duas teclas especiais:

- a tecla A, que triplica o número que aparece no visor; e

- a tecla B, que soma 4 unidades ao número que aparece no visor.

Suponha que no visor esteja o número 12. Ao apertar, primeiramente, a tecla A um total de 9 vezes e, logo em seguida, ao apertar a tecla B um total de 4 vezes obtemos uma sequência de 13 resultados. É correto afirmar que:

A a soma dos 9 primeiros resultados é $6\cdot(3^{10}-1)$.

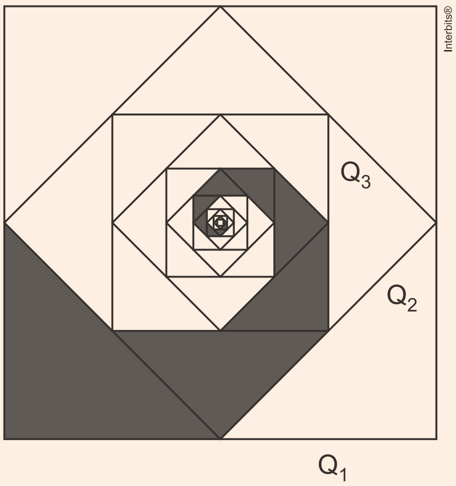
B a soma dos 4 últimos resultados é $20\cdot(3^{10}+2)$.

C o 12º resultado é $12\cdot(3^9+1)+4$.

D o 10º resultado é $12\cdot(3^9)$.

E a soma dos 13 resultados é $22\cdot(3^{10}+1)$.

16| Na figura abaixo, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado (Q_1) tem lado 1. O quadrado Q_2 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_1; o quadrado Q_3 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_2 e, assim, sucessiva e infinitamente.



A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é

A $\frac{1}{2}$.

B $\frac{1}{4}$.

C $\frac{1}{8}$.

D $\frac{1}{16}$.

E $\frac{1}{32}$.

TEXTO PARA A PRÓXIMA QUESTÃO:

Leia o texto publicado em maio de 2013 para responder à(s) questão(ões) a seguir.

Os Estados Unidos se preparam para uma invasão de insetos após 17 anos

> Elas vivem a pelo menos 20 centímetros sob o solo há 17 anos. E neste segundo trimestre, bilhões de cigarras (*Magicicada septendecim*) emergirão para invadir partes da Costa Leste, enchendo os céus e as árvores, e fazendo muito barulho.
>
> Há mais de 170 espécies de cigarras na América do Norte, e mais de 2 mil espécies ao redor do mundo. A maioria aparece todos os anos, mas alguns tipos surgem a cada 13 ou 17 anos. Os visitantes deste ano, conhecidos como *Brood II* (Ninhada II, em tradução livre) foram vistos pela última vez em 1996. Os moradores da Carolina do Norte e de Connecticut talvez tenham de usar rastelos e pás para retirá-las do caminho, já que as estimativas do número de insetos são de 30 bilhões a 1 trilhão.
>
> Um estudo brasileiro descobriu que intervalos baseados em números primos ofereciam a melhor estratégia de sobrevivência para as cigarras.

<http://tinyurl.com/zh8daj6> Acesso em: 30.08.2016. Adaptado.

17| Com relação à Ninhada II, e adotando o ano de 1996 como o 1º termo (a_1) de uma Progressão Aritmética, a expressão algébrica que melhor representa o termo geral (a_n) da sequência de anos em que essas cigarras sairão à superfície, com $n \in \mathbb{N}^*$, é dada por

A $a_n = 17 \cdot n + 1979$

B $a_n = 17 \cdot n + 1998$

C $a_n = 17 \cdot n + 2013$

D $a_n = 1996 \cdot n + 17$

E $a_n = 1979 \cdot n + 17$

GABARITO

01| B

Tem-se que a altura h, em centímetros, de uma pilha de n cadeiras, $n \geq 1$, em relação ao chão, é dada por

$h = 48 + 3(n-1) + 44 = 3n + 89.$

Portanto, se $h = 140$ cm, então $140 = 3n + 89 \Leftrightarrow n = 17.$

02| B

Dado que $f(0) = 8$, $f(1) = 2$ e $f(n) = \frac{f(n-1)}{f(n-2)}$, para $n > 1$, vem

$f(2) = \frac{1}{4}, f(3) = \frac{1}{8}, f(4) = \frac{1}{2}, f(5) = 4, f(6) = 8, f(7) = 2$ e

$f(8)=\frac{1}{4}.$

Logo, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
&f(0)=f(6)=\ldots=f(6k),\\
&f(1)=f(7)=\ldots=f(6k+1),\\
&f(2)=f(8)=\ldots=f(6k+2),\\
&f(3)=f(9)=\ldots=f(6k+3),\\
&f(4)=f(10)=\ldots=f(6k+4)
\end{aligned}
$$

e

$f(5)=f(11)=\ldots=f(6k+5),$

com $k\in$ □.

Portanto, como $50=6\cdot 8+2,$ temos $f(50)=f(2)=\frac{1}{4}.$

03| C

Sendo a quilometragem percorrida uma PA, pode-se escrever:

$a_1=6$

$a_n=42$

$n=$ número de dias

$r=2$

$42=6+(n-1)\cdot 2\rightarrow 18=n-1\rightarrow n=19$

$S=\frac{(6+42)\cdot 19}{2}=\frac{48\cdot 19}{2}\rightarrow S=456\text{ km}$

04| B

Seja o quadrado colorido

$$\begin{array}{|ccc|}\hline k & k+1 & k+2\\ k+8 & k+9 & k+10\\ k+16 & k+17 & k+18\\ \hline\end{array},$$

com $k\in$ □*. Logo, sabendo que a soma dos nove elementos desse quadrado é igual a $4.806,$ temos

$$
\begin{aligned}
3k+24+3k+27+3k+30=4806 &\Leftrightarrow 9k+81=4806\\
&\Leftrightarrow k=525.
\end{aligned}
$$

Portanto, escrevendo 525 como

$$
\begin{aligned}
525&=8\cdot 65+5\\
&=8\cdot 65+8-8+3\\
&=8\cdot 66-5,
\end{aligned}
$$

e observando que todo elemento da coluna 3 é da forma $8n-5,$ com n sendo o número da linha a que pertence tal elemento, podemos concluir que as linhas ocupadas pelo quadrado colorido dado são $66,67$ e $68.$

05| B

Os elementos da primeira coluna constituem uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 1 e razão $2.$ Logo, o primeiro elemento da linha de número 41 é dado por $1+40\cdot 2=81.$

Desde que cada elemento da primeira coluna figura n vezes em cada linha $n,$ com $1\le n\le 51$ e $n\in$ □, podemos concluir que a resposta é dada por

$$41\cdot 81+\left(\frac{83+101}{2}\right)\cdot 10=4241.$$

06| B

Desde que a soma dos termos equidistantes dos extremos de uma progressão aritmética finita é constante, vem

$$x+2y=y+3x\Leftrightarrow y=2x.$$

Por outro lado, sendo $x+2y=20,$ temos

$$x+2\cdot 2x=20\Leftrightarrow x=4.$$

A resposta é $3x=3\cdot 4=12.$

07| E

Na etapa 1 temos: $(1+2)$ quadrados.

Na etapa 2 temos: $(1+2+3)$ quadrados.

Na etapa 3 temos: $(1+2+3+4)$ quadrados.

$\vdots$

Na etapa 100 temos:

$$1+2+3+4+\ldots+100+101=\frac{(1+101)\cdot 101}{2}=5.151$$

quadrados.

08| A

$(2x,\ x+1,\ 3x)$ é uma P.A., então:

$$x+1=\frac{2x+3x}{2}\Rightarrow 2x+2=5x\Rightarrow 3x=3\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

Portanto, o perímetro P será dado por:

$P=2x+x+1+3x=6x+1$

$P=6\cdot\frac{2}{3}+1$

$P=5$

09| A

Calculando:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4} \\ a_2 &= \frac{1}{4}-2=\left(\frac{1}{4}-1\right)-1=-\frac{7}{4} \\ a_3 &= \frac{1}{4}-3=\left(\left(\frac{1}{4}-1\right)-1\right)-1=-\frac{11}{4} \end{aligned}\right\rangle \Rightarrow PA \Rightarrow r=-1$$

Assim, a alternativa correta é a letra [A].

10| C

Tem-se que os elementos de uma mesma coluna estão em progressão aritmética de razão 9. Logo, sendo $18109 = 9\cdot 2013-8,$ podemos concluir que tal número está situado na primeira coluna e na linha $n=2013.$

11| D

Desde que

$$a_{n+1} = 1\cdot 2^n \Leftrightarrow a_{n+1} = 2^n,$$

temos

$$S_n = 1\cdot\frac{2^n-1}{2-1} \Leftrightarrow S_n = a_{n+1}-1.$$

12| E

Tem-se que $c_8 = a_8\cdot b_8.$ Logo, sendo $a_8 = a_5+3\cdot r = 10+3\cdot 3 = 19$ e $b_8 = b_5\cdot q^3 = 10\cdot 3^3 = 270,$ vem $c_8 = 19\cdot 270 = 5.130.$

13| D

Tomando $x=1$ e sabendo que $f(1)=3,$ vem

$$f(n\cdot 1) = [f(1)]^n \Leftrightarrow f(n) = 3^n.$$

Portanto, segue que o resultado é igual a

$$\begin{aligned} f(1)+f(2)+\ldots+f(7) &= 3^1+3^2+\ldots+3^7 \\ &= 3\cdot\frac{3^7-1}{3-1} \\ &= 3279. \end{aligned}$$

14| E

$$a_1+a_2+\ldots+a_{10} = \left(\frac{1}{2}+1\right)+\left(\frac{1}{2}+2\right)+\left(\frac{1}{2}+4\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2}+512\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+(1+2+4+8+\ldots+512) =$$

$$= 10\cdot\frac{1}{2}+\frac{1\cdot\left(2^{10}-1\right)}{2-1} = 5+1023 = 1028$$

15| E

A soma dos nove primeiros resultados é

$$\begin{aligned} 12\cdot 3+12\cdot 3^2+\ldots+12\cdot 3^9 &= 12\cdot 3\cdot\frac{3^9-1}{3-1} \\ &= 6\cdot(3^{10}-3). \end{aligned}$$

A soma dos quatros últimos resultados é igual a

$$\begin{aligned} (12\cdot 3^9+4)+(12\cdot 3^9+8)+(12\cdot 3^9+12)+(12\cdot 3^9+16) &= 4\cdot 12\cdot 3^9+40 \\ &= 20\cdot(3^{10}+2)-4\cdot 3^{10}. \end{aligned}$$

O décimo segundo resultado é dado por $12\cdot 3^9+3\cdot 4 = 12\cdot(3^9+1).$

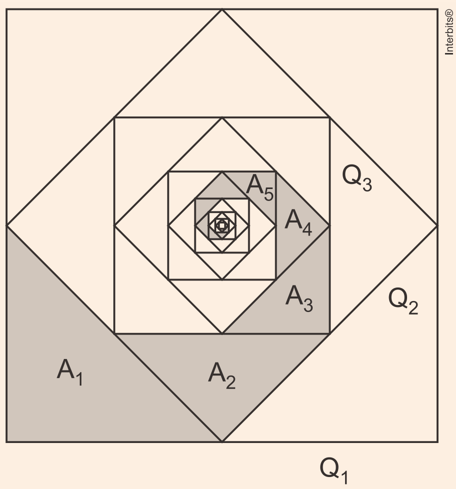
O décimo resultado é $12\cdot 3^9+4.$

A soma dos treze resultados é igual a

$$6\cdot 3^{10}-18+16\cdot 3^{10}+40 = 22\cdot 3^{10}+22 = 22\cdot(3^{10}+1).$$

16| B

A área de cada quadrado, a partir do segundo, é metade da área do quadrado anterior. Portanto, as áreas dos triângulos retângulos assinalados formam um PG infinita de razão $\frac{1}{2}.$



A sequência $A_1, A_2, A_3, \ldots$ é uma PG infinita de razão $\frac{1}{2}.$

Calculando a área A_1, temos:

$$A_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$$

Portanto, a soma de todas as áreas dos triângulos retângulos será dada por:

$$S = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots$$

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

17| A

Aplicando a fórmula do termo geral da P.A., temos:

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$
$$a_n = 1.996 + (n-1) \cdot 17$$
$$a_n = 17 \cdot n + 1979$$

Resumo das questões selecionadas nesta atividade