GEOMETRIA PLANA

TRIÂNGULOS

ANDERSON

MATEMÁTICA

Não existe qualquer referência pontual a quem ou como terá sido inventado ou descoberto o triângulo. Terá sido o Homem que ao longo da sua evolução terá sentido necessidade na sua vida prática de tornar rígidas e seguras algumas das suas construções? Por exemplo, nos tempos primitivos da civilização Grega, foi usado pelos gregos o triângulo de descarga.

O triângulo de descarga era uma construção que permitia descarregar as pressões exercidas por grandes pesos que se encontravam por cima das portas dos túmulos e das cidadelas. Devido ao peso, as portas podiam abater, mas com o triângulo, esse peso era suportado por postes laterais que eram maciços. Os triângulos de descarga eram geralmente abertos, mas podiam ser tapados e decorados, como acontece no caso da cidade de Micenas, com a Porta dos Leões.

No princípio da Idade Média, apareceu no Mediterrâneo, uma vela triangular, alinhada com o eixo longitudinal do casco, contrariando a até utilizada, que era perpendicular ao mesmo eixo e de configuração quadrada, chamada Redonda, por ao longe parecer redonda. Não se sabe quem a utilizou pela primeira vez.

Árabes, Indianos ou até Indonésios, são apontados como os percursores de tal sistema, que permite à embarcação navegar contra o vento a uns 50 ou 60 graus. Os Árabes usavam na pesca e no transporte de gêneros, uma embarcação robusta, de formas finas, pouco alterosa e de pouco calado, chamada "Caravo" que armava com uma vela latina (triangular). Com a ocupação da Península Ibérica, é de prever que este tipo de embarcação tenha vindo com os invasores e tenha chamado a atenção dos armadores da costa do Atlântico, devido às suas qualidades náuticas. Os Portugueses introduziram grandes melhoramentos e nasceu a Caravela Portuguesa, que foi o navio escolhido para a demanda dos descobrimentos substituindo as barcas de vela retangular. A vela triangular ou latina permitiu- lhes navegar contra o vento (bolinar). Durante mais de 450 anos a Caravela tornou-se célebre pelo Mundo.

Mestres de bolinar, os Portugueses, mantiveram, durante muitos anos, o segredo desta arte no Oceano. Por isso chegaram até ao Cabo da Boa Esperança, sem a concorrência do resto da Europa. Em 1575, o escritor Escalante de Mendonça escrevia: ...***"A Caravela Portuguesa foi a melhor invenção que até ao tempo se alcançou para a navegação de bolina."*** E nós acrescentamos:
" Na base desta invenção está o triângulo!"

O Triângulo é "estável"

Na atualidade, são muitas as situações em que se recorre à robustez do triângulo. Os engenheiros usam frequentemente formas triangulares nas suas construções, para as tornar mais seguras.

Estádio do Dragão, no Porto.
Ponte D. Luís, no Porto.

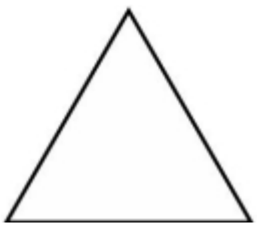
Passagem desnivelada para peões.


Nos postes de alta tensão, para suportar fortes ventos.


Na construção civil, os guindastes suportam e elevam grandes pesos, graças à existência de secções triangulares.

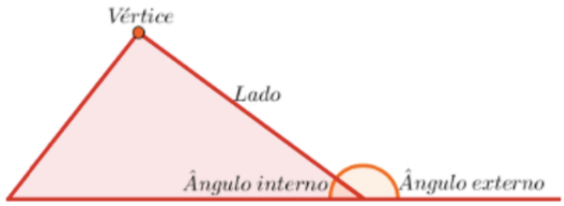
Definição

Triângulos são polígonos formados por três lados, três segmentos de reta que, dois a dois, tocam-se em seus pontos extremos, mas que não se cruzam em qualquer outro ponto.



Elementos de um triângulo

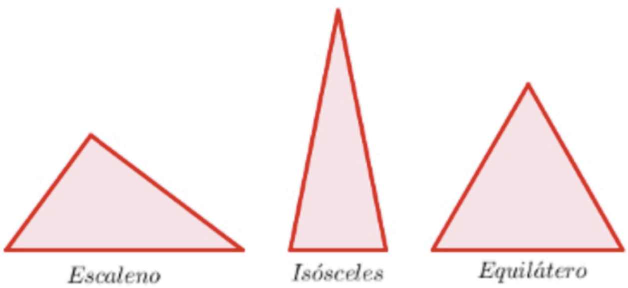
Os triângulos possuem os mesmos elementos dos polígonos, com exceção das diagonais.



Lados: são os segmentos de reta que formam o polígono;
Vértices: são os pontos de encontro entre os lados;
Ângulos internos: são os ângulos que podem ser observados entre dois lados adjacentes de um triângulo;
Ângulos externos: são os ângulos que podem ser observados entre um lado de um triângulo e o prolongamento do lado adjacente a ele.

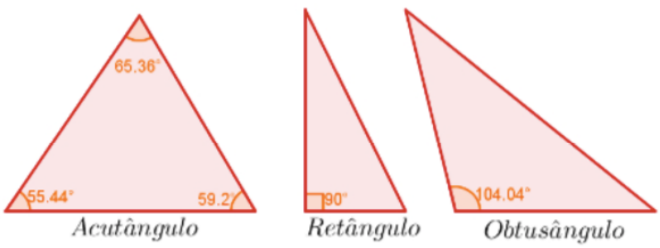
Classificações de triângulos

Os triângulos podem ser classificados a partir de seu número de lados.



Escaleno: triângulo que possui todos os lados com medidas diferentes;
Isósceles: triângulo que possui dois lados com medidas iguais;
Equilátero: triângulo que possui três lados com medidas iguais.

Outra classificação possível para os triângulos se refere às medidas de seus ângulos.



Acutângulo: Triângulo que possui todos os ângulos com medidas menores que 90°;
Retângulo: Triângulo que possui um ângulo com medida igual a 90°;
Obtusângulo: Triângulo que possui um ângulo com medida superior a 90°.

Propriedades dos triângulos

As propriedades a seguir são válidas para qualquer triângulo, independentemente de sua forma ou tamanho.

Propriedade P_1

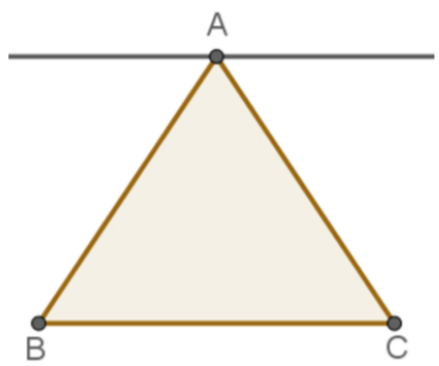
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre será igual a 180°.

Demonstração

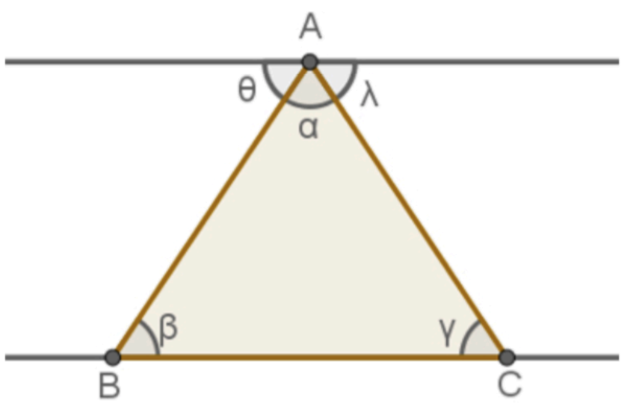
O procedimento usado para mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° será feito a seguir em etapas e baseia-se em outro conhecimento: dos ângulos formados em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal. Para compreender bem a demonstração, lembre- se: ângulos alternos internos são congruentes. Além disso, lembre-se também de que as semirretas que definem um ângulo raso (de 180°) formam uma reta. Isso significa que qualquer ângulo observado sobre uma reta terá essa medida.

Etapa 1: Desenhar um triângulo ABC cuja base é BC. Observe apenas que esse triângulo é aleatório, pode ser qualquer triângulo, e que a base também pode ser AC ou BA que o resultado obtido será o mesmo.

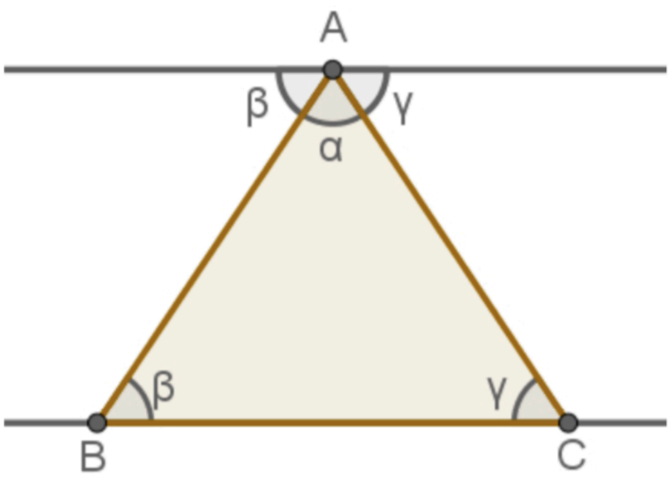
Etapa 2: Sobre o vértice A, trace a reta paralela ao lado BC, como mostra o exemplo a seguir:



Etapa 3: Colocar sobre esse desenho os ângulos internos α, β e γ do triângulo e os ângulos θ e λ que foram formados no processo:

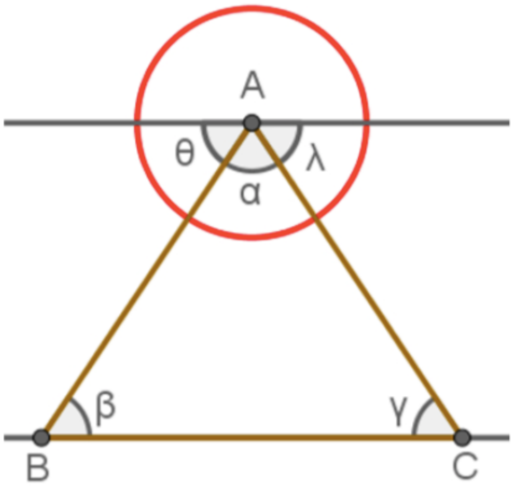


Etapa 4: Observe que os ângulos θ e β são alternos internos. Isso significa que são congruentes. O mesmo acontece com γ e λ, que também são alternos internos. Logo, podemos trocar θ por β e λ por γ na imagem. Assim, obteremos o esquema ilustrado pela imagem a seguir.



Etapa 5: Observar que a soma dos ângulos realmente é 180°. Para isso, note que os ângulos na figura a seguir, que foram circulados, ao mesmo tempo, têm a mesma medida dos ângulos internos do triângulo e os três juntos formam um ângulo raso, portanto:

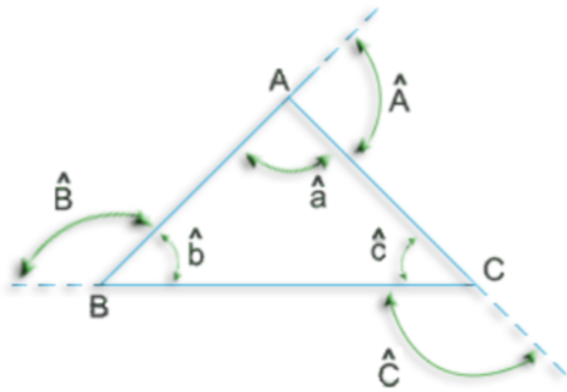
$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



Propriedade P_2

A soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo sempre será igual a 360°.

Demonstração



Perceba que, no triângulo ABC, $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos externos e $\hat{a}, \hat{b}$ e $\hat{c}$ são os ângulos internos.

Sabe-se que:
$\hat{A} + \hat{a} = 180°$
$\hat{B} + \hat{b} = 180°$
$\hat{C} + \hat{c} = 180°$

Ou ainda:
$\hat{A} + \hat{a} + \hat{B} + \hat{b} + \hat{C} + \hat{c} = 540°$

Reorganizando:
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 540°$

Perceba que $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c}$ é a soma dos ângulos internos e portanto, vale 180°.

$180° + \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 540°$

Donde:

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360°$

que nos confirma que a soma dos ângulos externos de um triângulo é realmente 360°.

Propriedade P_3

A medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração

Vimos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$ (i)

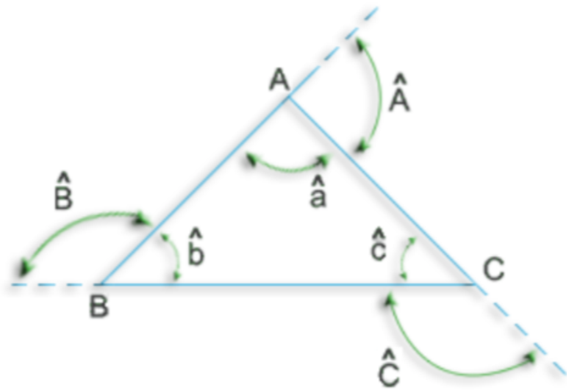
Vimos também que a soma de um ângulo interno com seu respectivo externo também resulta em 180°.

$\hat{A} + \hat{a} = 180°$ (ii)

Basta igualarmos as equações (i) e (ii).

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \hat{A} + \hat{a}$

$\hat{b} + \hat{c} = \hat{A}$



O que nos confirma que a medida de um ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

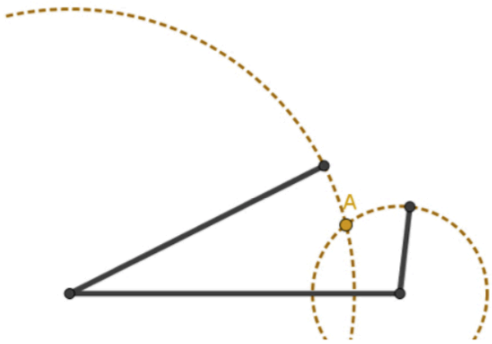
Propriedade P_4

A soma das medidas de dois lados de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro lado.

Essa propriedade, conhecida como condição de existência de um triângulo, determina se um triângulo poderá existir ou não de acordo com o comprimento de seus lados.

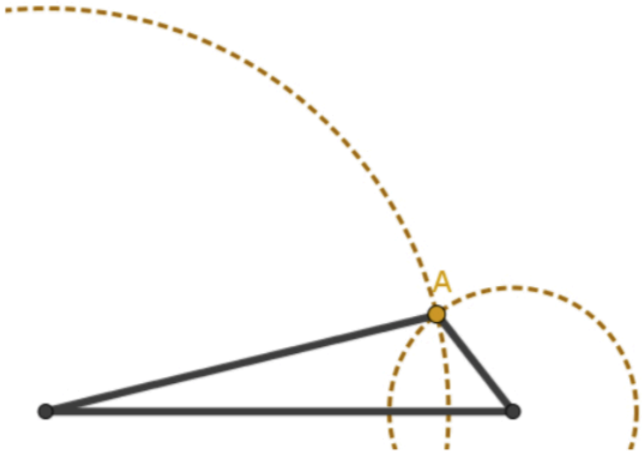
Fundamento da condição de existência

Imagine que um triângulo será construído com três varetas de tamanho fixo. A maior delas será colocada na horizontal.



Construção de um triângulo com medidas fixas para os lados

Observe na imagem a seguir que, se girarmos as duas varetas, elas se tocarão no ponto A, fechando o triângulo.

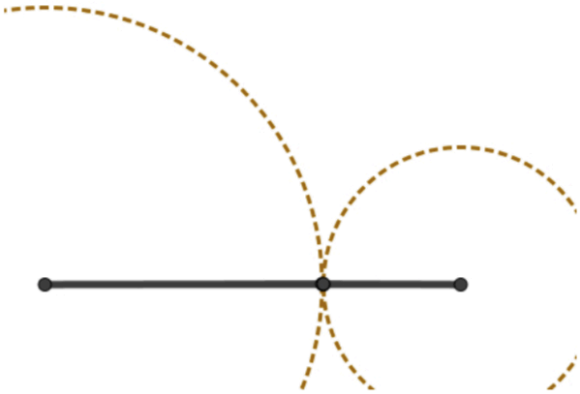


A condição para que essas varetas formem o triângulo é a seguinte: o resultado da soma das medidas das duas varetas que foram giradas precisa ser maior que a medida da vareta horizontal. Traduzindo para a linguagem matemática, teremos a seguinte regra:

Em qualquer triângulo, a soma das medidas de dois lados é sempre maior que a medida do terceiro.

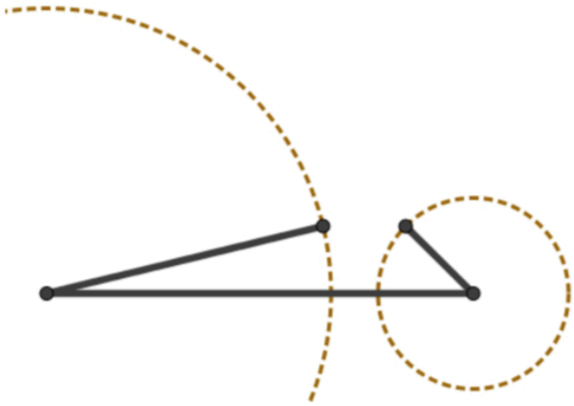
Observando as imagens, esses lados que estão sendo somados são as varetas livres que foram giradas. Observe que o comprimento das varetas é justamente o ***raio da circunferência*** que descreve a possível trajetória de suas extremidades. Assim, para que haja ***triângulo***, é preciso haver ponto de intersecção entre essas circunferências.

Observe apenas que esse ponto não pode ser de ***tangência***, ou seja, essas circunferências não podem se tocar em apenas um ponto, pois, dessa maneira, a soma dos dois lados livres do ***triângulo*** seria igual à medida do terceiro. Com isso, teríamos a seguinte figura:



Essa figura, evidentemente, não é um triângulo.

Caso a soma dos comprimentos das duas varetas giradas seja menor do que a maior vareta (horizontal), elas jamais formarão um triângulo



Observe pela trajetória que as varetas não se tocarão, independentemente do giro que for feito com elas.

Perceba que existe uma propriedade em torno do comprimento dos lados do ***triângulo*** para que seja possível construí-lo. Essa propriedade é o que chamamos de ***condição de existência de um triângulo***.

Condição de existência

Suponha que as medidas dos lados de um triângulo sejam ***a***, ***b*** e ***c.*** A condição de existência de um ***triângulo*** é a seguinte:

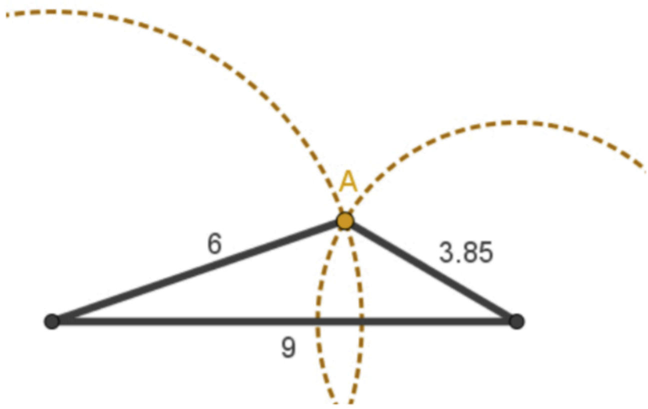
$$a < b + c$$
$$b < a + c$$
$$c < a + b$$

Contudo, não é necessário verificar todas elas para garantir a existência de um ***triângulo***. Sempre que a soma dos dois lados menores de um triângulo for maior que o comprimento do maior lado, esse triângulo existirá.

Para compreender melhor, imagine que ***a*** é a maior medida entre as três. Então, se

$$a < b + c$$

então, ***b*** será menor que ***a + c*** e ***c*** será menor que ***a + b***.

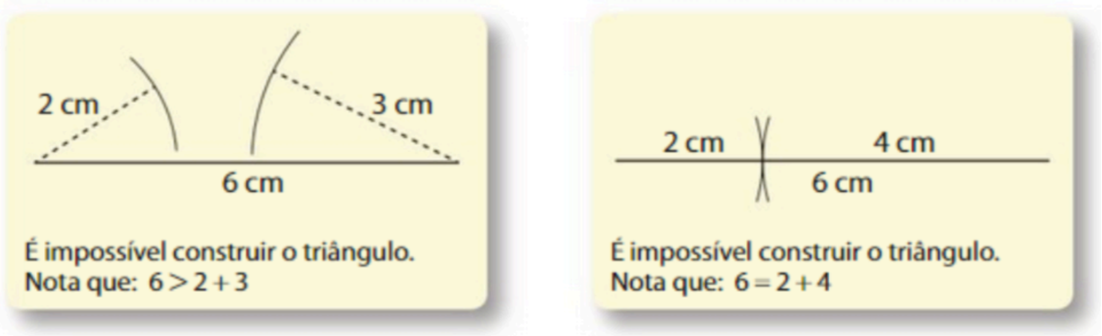


Triângulo em que valem as desigualdades citadas acima

Observe que o ***triângulo*** da imagem acima obedece a essa regra. 9 < 6 + 3,85. Por isso, é possível que exista um triângulo com essas medidas.

Se tentarmos construir triângulos com as seguintes medidas, veja o que irá acontecer:

2 cm , 3 cm e 6 cm ou 2 cm , 4 cm e 6 cm



Partindo da condição de existência de um triângulo:

$$a < b + c$$
$$b < a + c \rightarrow a > b - c$$
$$c < a + b \rightarrow a > c - b$$

Podemos concluir que um lado de um triângulo não só deve ser menor que a soma dos outros dois $a < b + c$, como também deve ser maior que a diferença entre os outros dois $a > b - c, a > c - b$.

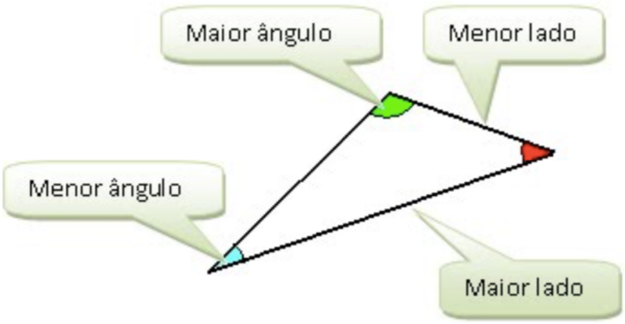
Para unimos tudo em única expressão, teremos:

$$|b - c| < a < b + c$$

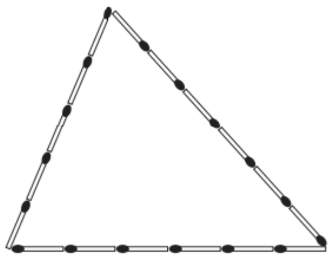
Uma versão mais sofisticada da desigualdade triangular.

Propriedade P_5

O maior lado de um triângulo opõe-se ao seu maior ângulo, analogamente, o menor lado de um triângulo opõe-se ao seu menor ângulo.



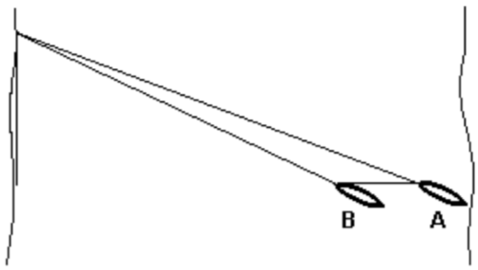
01. (ENEM 2014) Uma criança deseja criar triângulos utilizando palitos de fósforo de mesmo comprimento. Cada triângulo será construído com exatamente 17 palitos e pelo menos um dos lados do triângulo deve ter o comprimento de exatamente 6 palitos. A figura ilustra um triângulo construído com essas características.



A quantidade máxima de triângulos não congruentes dois a dois que podem ser construídos é

Ⓐ 3
Ⓑ 5
Ⓒ 6
Ⓓ 8
Ⓔ 10

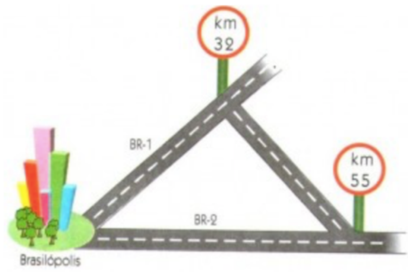
02. (UFPE 2005) Um barco está sendo rebocado para a margem de um porto por um cabo de aço. Inicialmente, o barco está no ponto A da ilustração, quando o cabo tem comprimento de 100 m. Após puxar o cabo de 20 m, o barco ocupa a posição B.



Nessas condições, a distância AB é

Ⓐ maior que 20 m.
Ⓑ igual a 20 m.
Ⓒ igual a 19 m
Ⓓ igual a 18 m.
Ⓔ menor que 18 m.

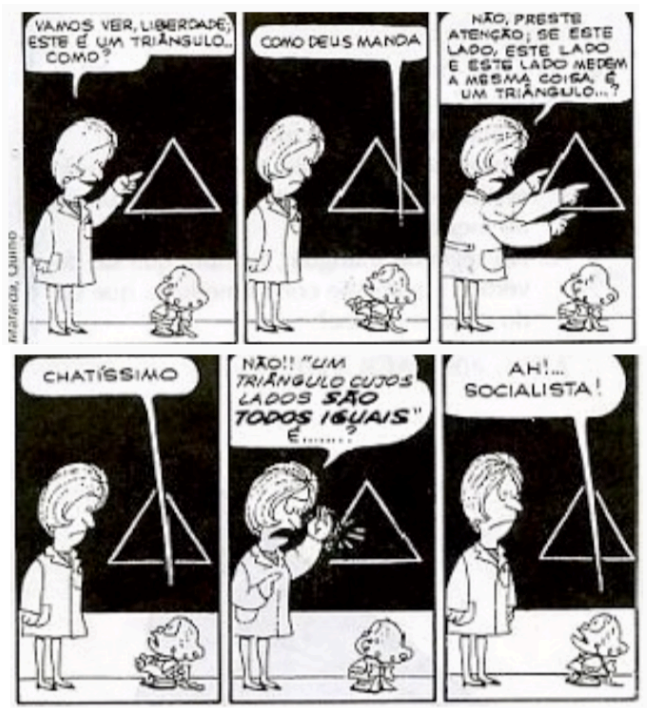
03. Duas estradas partem de Brasilópolis e a distância, em km, que aquele ponto está da cidade de origem é mostrada em placas ao longo da estrada. A placa de km 32 indica que aquele ponto está a 32 km da cidade de Brasilópolis. Deseja-se fazer uma ligação entre o km 32 da BR-1 e o km 55 da BR-2, como mostra a figura.



Sabendo que essa ligação terá um número inteiro de quilômetros, quais as medidas, mínima e máxima, respectivamente, que poderá ter?

Ⓐ 22km e 86km
Ⓑ 23km e 86km
Ⓒ 23km e 87km
Ⓓ 24km e 86km
Ⓔ 24km e 87km

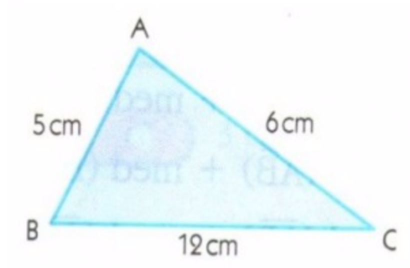
04. (IFSUL 2017) Analise a tirinha abaixo.



De acordo com a tirinha, o triângulo é classificado como

Ⓐ retângulo.
Ⓑ equilátero.
Ⓒ isósceles.
Ⓓ escaleno.
Ⓔ obtusângulo.

05. A empresa de decoração GEOMETRIX convocou seus funcionários para um desafio. O primeiro funcionário que conseguisse reproduzir com perfeição o projeto apresentado receberia o salário dobrado.

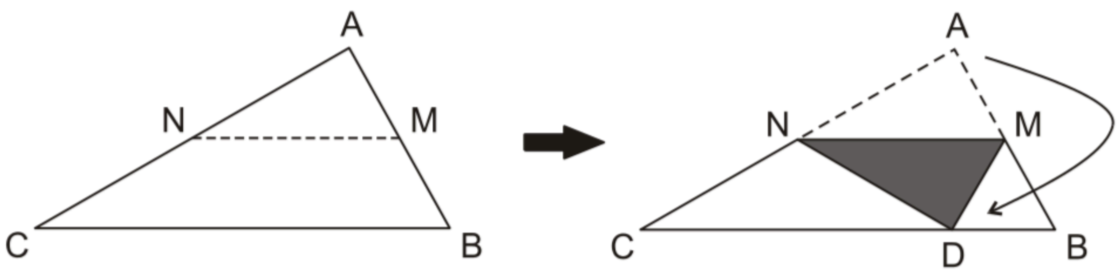


O projeto consistia em um triangulo azul de dimensões 5cm, 6cm e 12cm.

Assim que iniciaram os trabalhos, Fernando, lembrou-se da desigualdade triangular e percebeu que era

Ⓐ possível construir um triângulo com quaisquer três medidas fornecidas em um dado projeto.
Ⓑ impossível construir um triângulo com essas medidas, pois o lado BC é maior que a soma das medidas de AB e AC.
Ⓒ possível construir um triângulo com essas medidas, pois o lado AB é menor que a soma das medidas de AC e BC.
Ⓓ impossível construir um triângulo com essas medidas, pois o lado AB é maior que a soma das medidas de BC e AC.
Ⓔ possível construir um triângulo com essas medidas, pois o lado BC é menor que a soma das medidas de AB e AC.

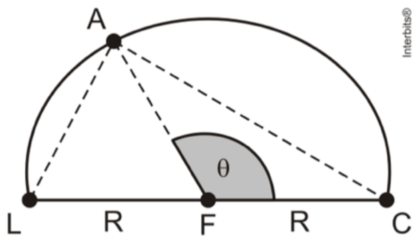
06. (ENEM PPL 2012) Um professor, ao fazer uma atividade de origami (dobraduras) com seus alunos, pede para que estes dobrem um pedaço de papel em forma triangular, como na figura a seguir, de modo que M e N sejam pontos médios respectivamente de AB e AC, e D, ponto do lado BC, indica a nova posição do vértice A do triângulo ABC.



Se ABC é um triângulo qualquer, após a construção, são exemplos de triângulos isósceles os triângulos

Ⓐ CMA e CMB
Ⓑ CAD e ADB
Ⓒ NAM e NDM
Ⓓ CND e DMB
Ⓔ CND e NDM

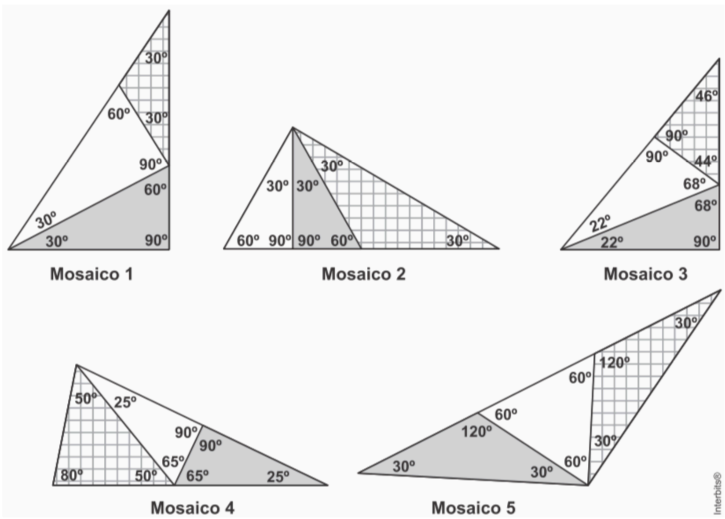
07. (ENEM PPL 2012) Durante seu treinamento, um atleta percorre metade de uma pista circular de raio R, conforme figura a seguir. A sua largada foi dada na posição representada pela letra L, a chegada está representada pela letra C e a letra A representa o atleta. O segmento LC é um diâmetro da circunferência e o centro da circunferência está representado pela letra F. Sabemos que, em qualquer posição que o atleta esteja na pista, os segmentos LA e AC são perpendiculares. Seja θ o ângulo que o segmento AF faz com segmento FC.



Quantos graus mede o ângulo θ quando o segmento AC medir R durante a corrida?

- Ⓐ 15 graus
- Ⓑ 30 graus
- Ⓒ 60 graus
- Ⓓ 90 graus
- Ⓔ 120 graus

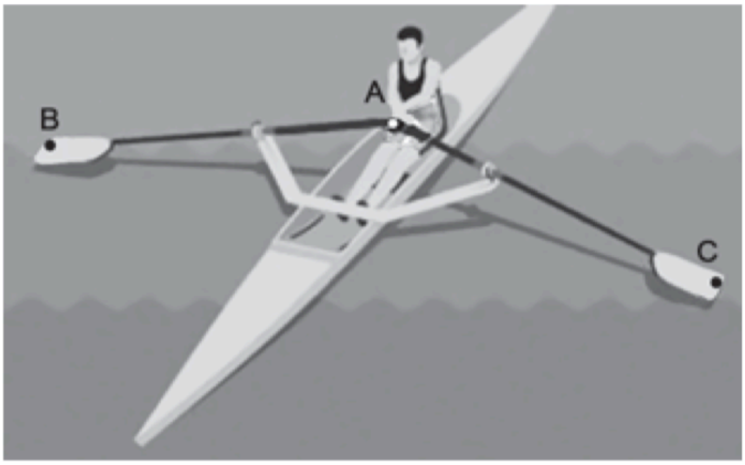
08. (ENEM 2016 – 2ª Aplicação) Pretende-se construir um mosaico com o formato de um triângulo retângulo, dispondo-se de três peças, sendo duas delas triângulos congruentes e a terceira um triângulo isósceles. A figura apresenta cinco mosaicos formados por três peças.



Na figura, o mosaico que tem as características daquele que se pretende construir é o

- Ⓐ 1.
- Ⓑ 2.
- Ⓒ 3.
- Ⓓ 4.
- Ⓔ 5.

09. (ENEM 2018) O remo de assento deslizante é um esporte que faz uso de um barco e dois remos do mesmo tamanho. A figura mostra uma das posições de uma técnica chamada afastamento.



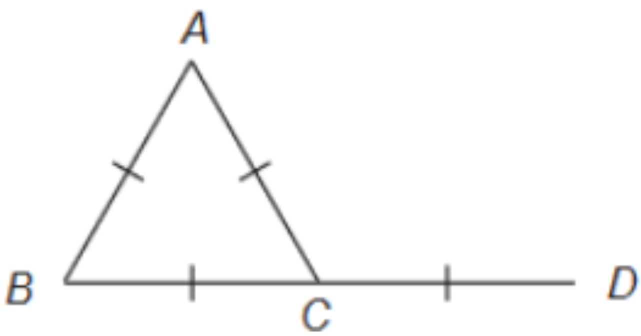
Disponível em: www.remobrasil.com. Acesso em: 6 dez. 2017 (adaptado).

Nessa posição, os dois remos se encontram no ponto A e suas outras extremidades estão indicadas pelos pontos B e C. Esses três pontos formam um triângulo ABC cujo ângulo BÂC tem medida de 170°.

O tipo de triângulo com vértices nos pontos A, B e C, no momento em que o remador está nessa posição, é

Ⓐ retângulo escaleno.
Ⓑ acutângulo escaleno.
Ⓒ acutângulo isósceles.
Ⓓ obtusângulo escaleno.
Ⓔ obtusângulo isósceles.

10. (Petrobras 2017 – Cesgranrio) Um arame de extremidades C e D e 8 cm de comprimento é dobrado de modo a formar um triângulo equilátero ABC mantendo os pontos B, C e D alinhados, conforme a Figura a seguir.



Qual a distância, em centímetros, entre os pontos A e D?

Ⓐ $\sqrt{3}$
Ⓑ $2\sqrt{3}$
Ⓒ $4\sqrt{3}$
Ⓓ 2
Ⓔ 4

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	A
02	A
03	D
04	B
05	B
06	D
07	C
08	B
09	E
10	B

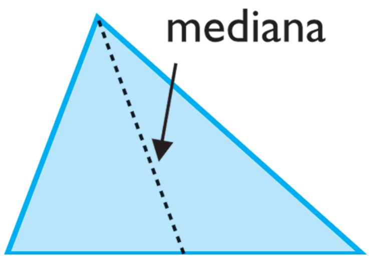
GEOMETRIA PLANA

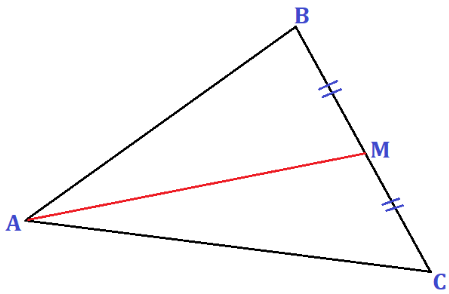
TRIÂNGULOS

ANDERSON
MATEMÁTICA

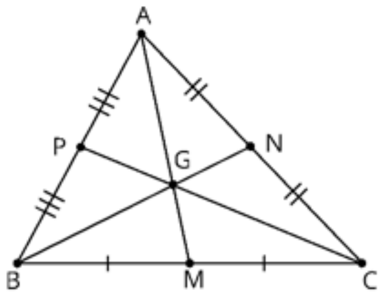
MEDIANA

Chama-se mediana de um triângulo o segmento de reta que liga um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.



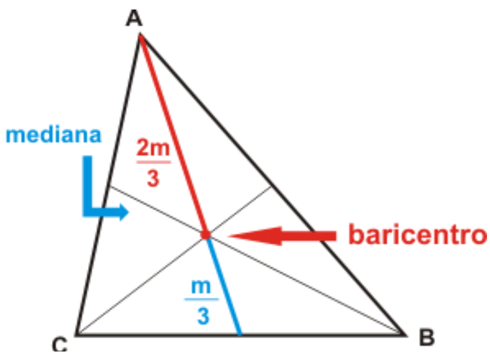


A mediana divide um triângulo em dois triângulos de mesma área. Todo triângulo tem três medianas, elas dividem o triângulo em seis triângulos de mesma área e se cruzam num ponto interno ao triângulo. Esse ponto é dito baricentro do triângulo.



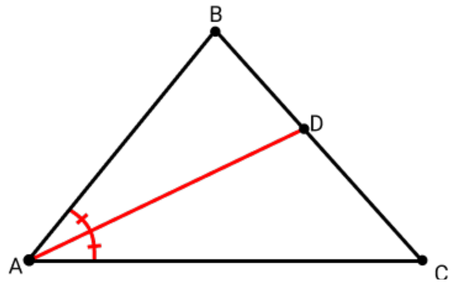
BARICENTRO

Ao redor do baricentro, a área do triângulo está igualmente distribuída. É possível equilibrar o triângulo se o apoiarmos pelo baricentro. O baricentro é o centro de gravidade do triângulo e divide cada mediana na razão 2 : 1. A medida do baricentro ao vértice é o dobro da medida do baricentro ao lado. A medida do baricentro ao vértice é dois terços da mediana, enquanto que a medida do baricentro ao lado é um terço da mediana.

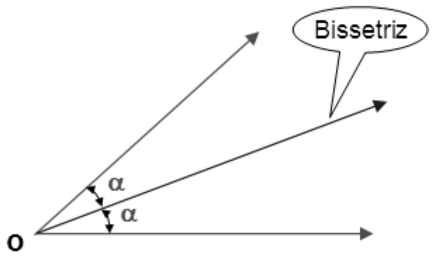


BISSETRIZ

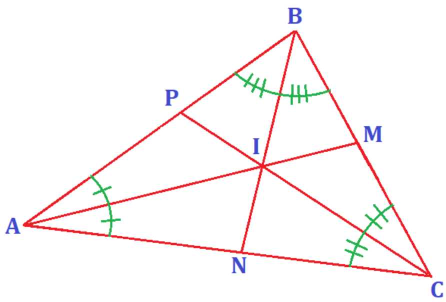
Bissetriz interna de um triângulo é uma semirreta que liga um vértice a um ponto do lado oposto, dividindo o ângulo interno correspondente a esse vértice em dois ângulos congruentes.



A bissetriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos dois lados de um ângulo.

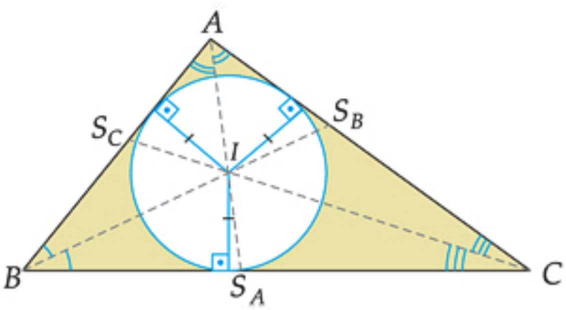


Todo triângulo tem três bissetrizes internas. Estas se cruzam num ***ponto interno*** ao triângulo. Esse ponto é chamado ***incentro*** do triângulo.



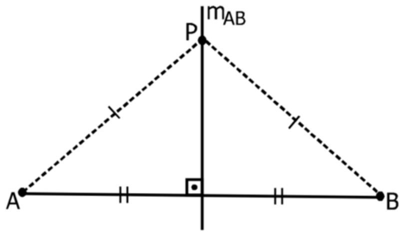
INCENTRO

O incentro equidista dos lados do triângulo e é ***o centro da circunferência inscrita*** (circunferência tangente aos lados) no triângulo.

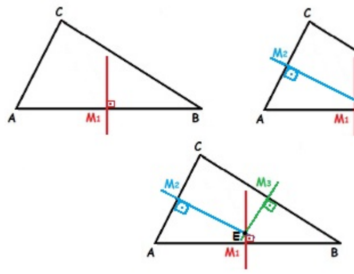


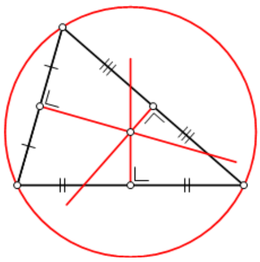
MEDIATRIZ

A mediatriz é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam dos extremos de um segmento deste plano, sendo assim, a mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a este segmento e que o divide em dois outros congruentes.



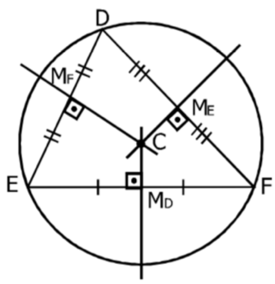
Assim, qualquer ponto da mediatriz m_{AB} do segmento de reta AB da figura equidista de A e B, e qualquer ponto do plano que equidista de A e B pertence à mediatriz m_{AB}. Todo triângulo possui três mediatrizes que se encontram em um único ponto, denominado ***circuncentro***.





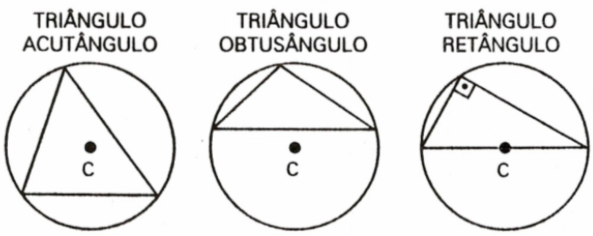
CIRCUNCENTRO

O circuncentro equidista dos vértices do triângulo e é o centro da circunferência circunscrita (que contém os vértices) ao triângulo.



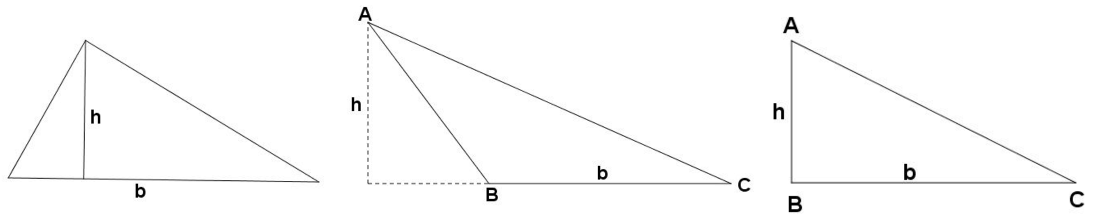
É importante saber que:

O circuncentro do triângulo acutângulo é sempre um ponto interno ao triângulo.
O circuncentro do triângulo obtusângulo é sempre um ponto externo ao triângulo.
O circuncentro do triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.



ALTURA

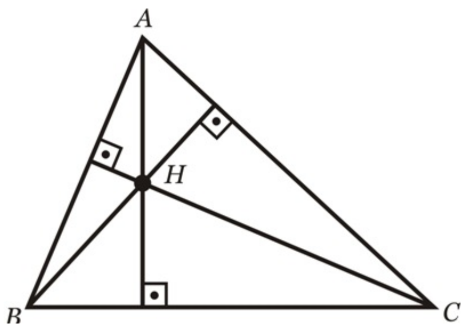
Altura de um triângulo é o segmento de reta que liga um vértice a um ponto da reta que contém o lado oposto de modo que esse segmento de reta seja perpendicular a essa reta.



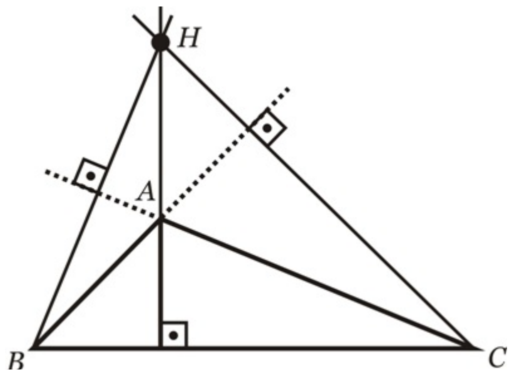
Todo triângulo tem três alturas. As retas que contêm as alturas cruzam-se num ponto chamado ***ortocentro*** do triângulo.

O ortocentro pode ser:

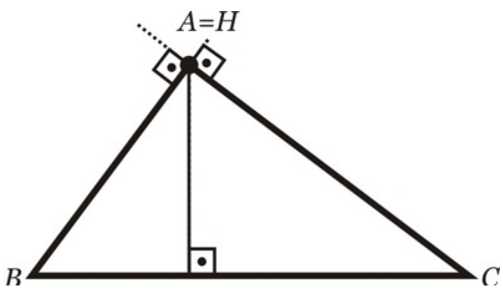
Interno: se o triângulo for acutângulo:



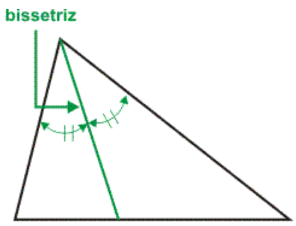
Externo: se o triângulo for obtusângulo:

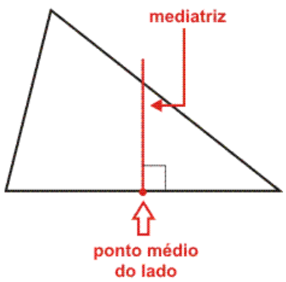


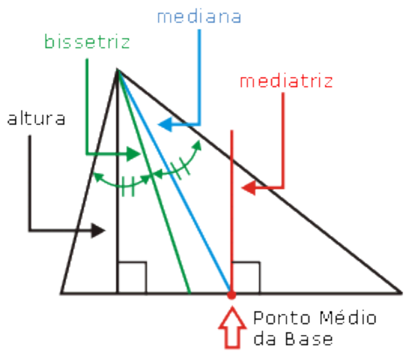
Coincidente: se o triângulo for retângulo:

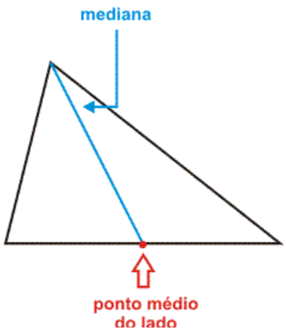


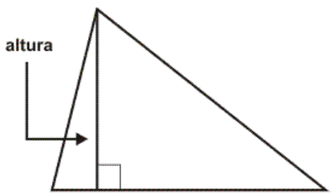
RECAPITULANDO

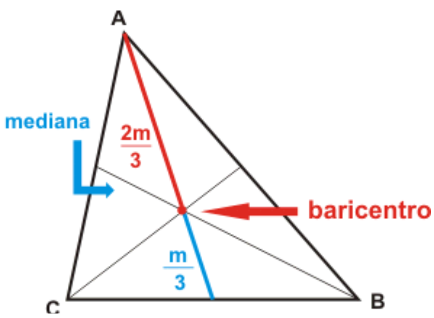


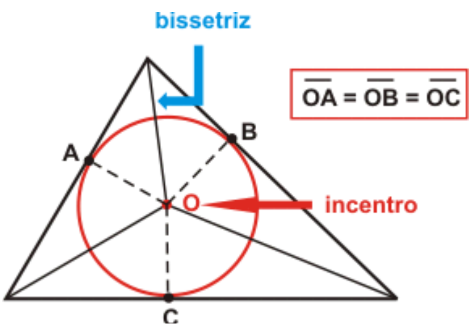


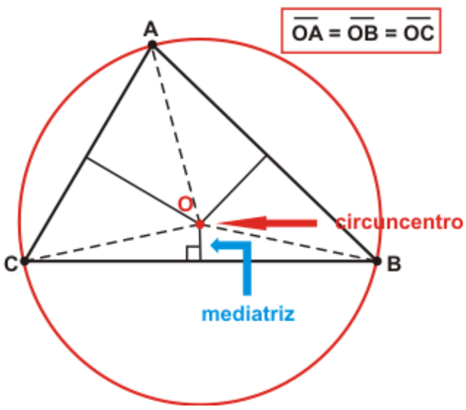


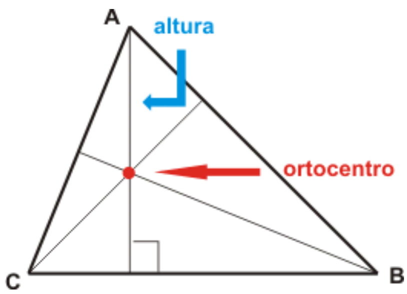






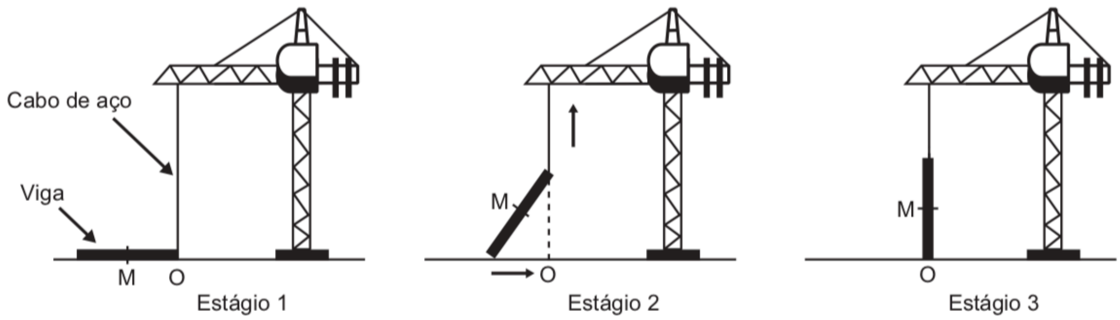






QUESTÕES

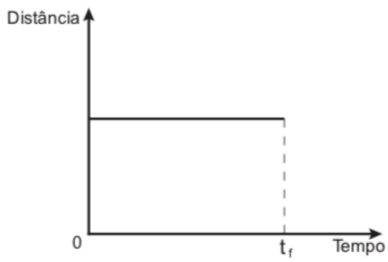
11. (ENEM 2018) Os guindastes são fundamentais em canteiros de obras, no manejo de materiais pesados como vigas de aço. A figura ilustra uma sequência de estágios em que um guindaste iça uma viga de aço que se encontra inicial mente no solo.

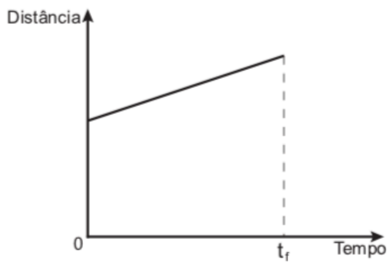


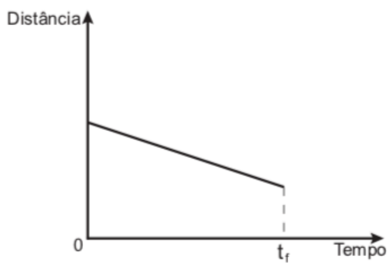
Na figura, o ponto O representa a projeção ortogonal do cabo de aço sobre o plano do chão e este se mantém na vertical durante todo o movimento de içamento da viga, que se inicia no tempo t = 0 (estágio 1) e finaliza no tempo t_f (estágio 3).

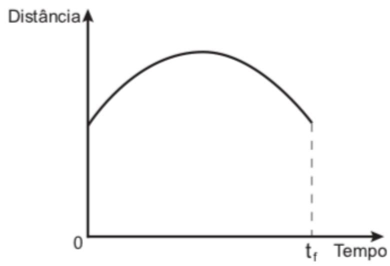
Uma das extremidades da viga é içada verticalmente a partir do ponto O, enquanto que a outra extremidade desliza sobre o solo em direção ao ponto O. Considere que o cabo de aço utilizado pelo guindaste para içar a viga fique sempre na posição vertical. Na figura, o ponto M representa o ponto médio do segmento que representa a viga.

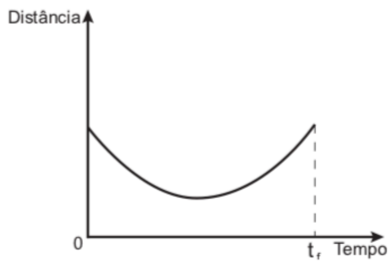
O gráfico que descreve a distância do ponto M ao ponto O, em função do tempo, entre t = 0 e t_f, é

A


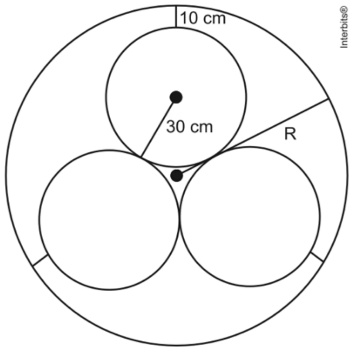
B


C


D


E


12. (ENEM 2013) Em um sistema de dutos, três canos iguais, de raio externo 30 cm, são soldados entre si e colocados dentro de um cano de raio maior, de medida R. Para posteriormente ter fácil manutenção, é necessário haver uma distância de 10 cm entre os canos soldados e o cano de raio maior. Essa distância é garantida por um espaçador de metal, conforme a figura:



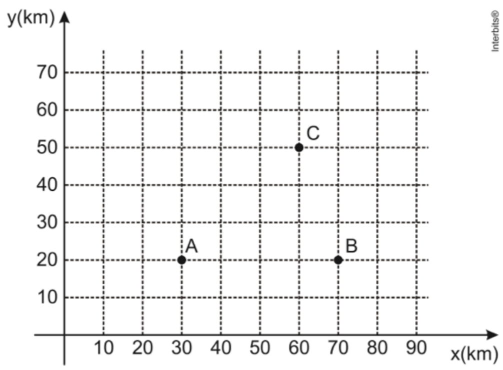
Utilize 1,7 como aproximação para $\sqrt{3}$.

O valor de R, em centímetros, é igual a

- A) 64,0.
- B) 65,5.
- C) 74,0.
- D) 81,0.
- E) 91,0.

13. (ENEM 2013) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades.

As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

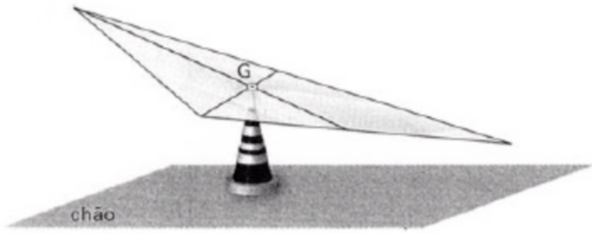
- A) (65 ; 35).
- B) (53 ; 30).
- C) (45 ; 35).
- D) (50 ; 20).
- E) (50 ; 30).

14. (ENEM 2005) Quatro estações distribuidoras de energia A, B, C e D estão dispostas como vértices de um quadrado de 40km de lado. Deseja-se construir uma estação central que seja ao mesmo tempo equidistante das estações A e B e da estrada (reta) que liga as estações C e D.

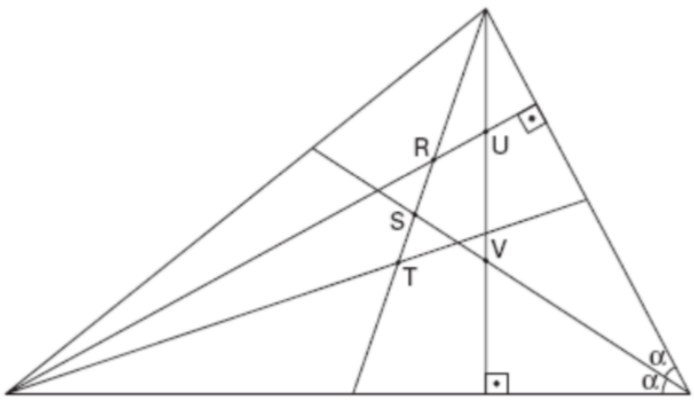
A nova estação deve ser localizada

A) no centro do quadrado.
B) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 15km dessa estrada.
C) na perpendicular à estrada que liga C e D passando por seu ponto médio, a 25km dessa estrada.
D) no vértice de um triângulo equilátero de base AB, oposto a essa base.
E) no ponto médio da estrada que liga as estações A e B.

15. (SIMULADO SAS 2012) Num triângulo, o baricentro é o ponto de encontro das medianas. Uma mediana une um vértice ao meio do lado oposto. A palavra baricentro vem do grego ***barys***, que significa pesado ou grave. Podemos entender o baricentro como o “centro de gravidade” de uma superfície triangular. Quando soltamos um objeto no ar, ele cai no chão, como se estivesse sendo atraído para baixo, por conta da força da gravidade. Na figura seguinte, observe que, quando se apoia uma superfície triangular pelo seu baricentro, ela tende a ficar parada, ou seja, em equilíbrio.



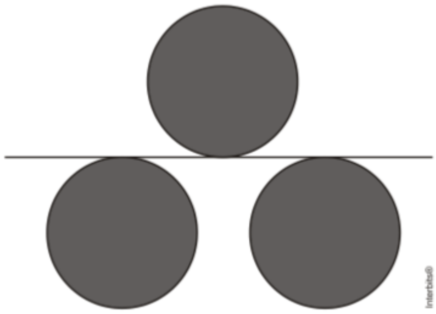
A figura seguinte representa um triângulo de cartolina, em que estão destacados os pontos R, S, T, U e V.



Esse triângulo de cartolina ficaria em equilíbrio se o apoiássemos, preferencialmente, no ponto:

A) R
B) S
C) T
D) U
E) V

16. (UFG 2013 Adaptada) Gerard Stenley Hawkins, matemático e físico, nos anos 1980, envolveu-se com o estudo dos misteriosos círculos que apareceram em plantações na Inglaterra. Ele verificou que certos círculos seguiam o padrão indicado na figura a seguir, isto é, três círculos congruentes, com centros nos vértices de um triângulo equilátero, tinham uma reta tangente comum.



Nestas condições, e considerando-se uma circunferência maior que passe pelos centros dos três círculos congruentes, a razão entre o raio da circunferência maior e o raio dos círculos menores é

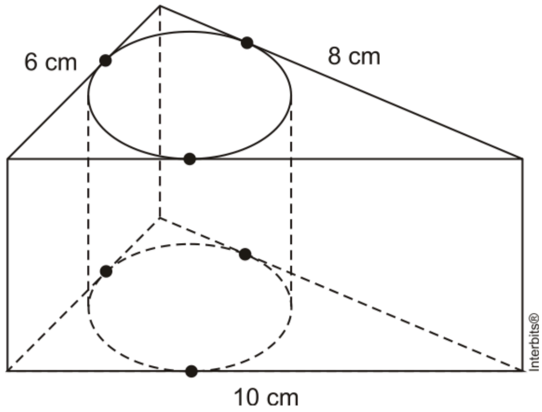
Ⓐ 4/3
Ⓑ 3/4
Ⓒ 2/3
Ⓓ 3/5
Ⓔ 7/3

17. (UNESP 2013) Um aluno precisa localizar o centro de uma moeda circular e, para tanto, dispõe apenas de um lápis, de uma folha de papel, de uma régua não graduada, de um compasso e da moeda.

Nessas condições, o número mínimo de pontos distintos necessários de serem marcados na circunferência descrita pela moeda para localizar seu centro é

Ⓐ 3.
Ⓑ 2.
Ⓒ 4.
Ⓓ 1.
Ⓔ 5.

18. (ENEM 2010) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente as suas faces laterais, conforme mostra a figura.



O raio da perfuração da peça é igual a

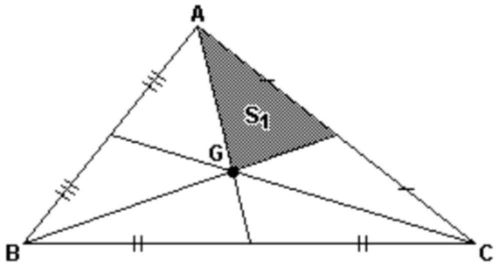
- **A** 1 cm.
- **B** 2 cm.
- **C** 3 cm.
- **D** 4 cm.
- **E** 5 cm.

19. (UFU 2015 Adaptada) Uma máquina moderna usa um sistema de coordenadas cartesianas xOy para representar a forma e a dimensão (mapear) dos objetos que serão cortados, furados etc. Uma chapa metálica delgada triangular é mapeada pelo triângulo de vértices A = (-3, 0), B = (1, 4) e C = (5, -4) e será feito um furo circular exatamente no centro de massa dessa chapa.

Para realizar esse procedimento com precisão, a máquina deve perfurar sobre o ponto

- **A** (1, 2)
- **B** (3, -4)
- **C** (1, 0)
- **D** (-1, -2)
- **E** (-2, 4)

20. Fernando, um dos homens mais ricos da atualidade, possui mais de mil terrenos, dentre os quais, um em formato de triângulo ABC, ilustrado na figura abaixo, na qual, marcações iguais indicam dimensões iguais.



Para se adequar as leis do município, teve que reservar uma área de 600 m^2 do terreno para preservação ambiental. Se a região denotada por S_1 possui exatamente a área desejada, qual a área total do terreno ABC?

Ⓐ 7.200 m^2
Ⓑ 6.200 m^2
Ⓒ 5.000 m^2
Ⓓ 4.200 m^2
Ⓔ 3.600 m^2

21. O Toblerone foi criado em 1908 pelos suíços Theodor Tobler e Emil Baumann. Acreditava-se que a sua original forma triangular tivesse sido inspirada pelo monte Matterhorn, nos Alpes suíços; entretanto, de acordo com os filhos de Theodor, o formato triangular se origina de uma pirâmide humana que as dançarinas do Folies Bergère fizeram ao final de uma apresentação a que Theodor assistiu.

Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Toblerone>

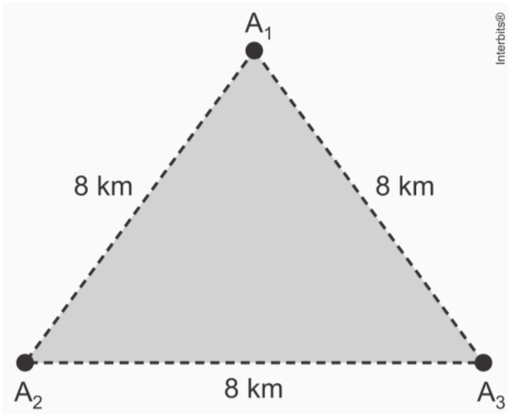
A embalagem do chocolate tem forma de prisma triangular, cuja base é um triângulo equilátero com lado medindo $2\sqrt{3}$.

Uma criança, extremamente curiosa, logo após comer seu TOBLERONE, introduziu 4 gizes de cera de formato cilíndricos de raio r na caixa que estava vazia. O centro de um dos círculos, que representa a base do giz, coincide com o baricentro do triângulo. Este círculo tangencia externamente os demais e estes, por sua vez, tangenciam 2 lados do triângulo formado pelas faces laterais da embalagem.

Qual deve ser o raio da base do giz de cera, em cm, para que a situação descrita seja satisfeita?

Ⓐ 0,5
Ⓑ 1,0
Ⓒ 1,5
Ⓓ 2,0
Ⓔ 3,0

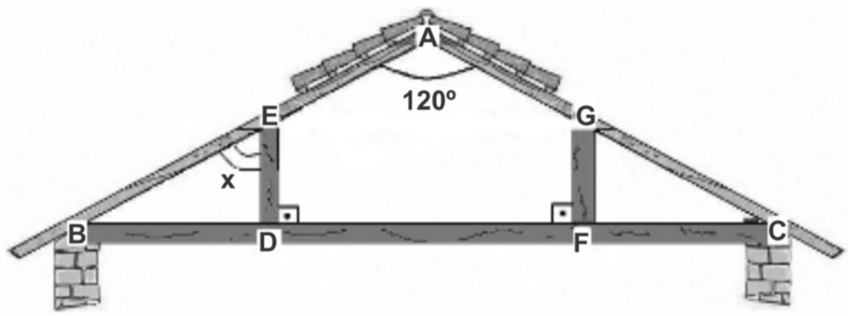
22. (UEPA 2015) Um dos problemas enfrentado pelas empresas de telefonia celular e disponibilizar sinal de qualidade aos seus usuários, fato que nos últimos tempos tem gerado uma série de reclamações segundo o PROCON. Visando solucionar os problemas de infraestrutura e cobrir uma região com sinal de qualidade, uma operadora instalou **3** antenas (A_1, A_2 e A_3) situadas nos vértices de um triângulo equilátero cujo lado mede 8km conforme indicado na figura abaixo.



Nessas condições e considerando que cada uma das antenas cobre uma área circular equivalente a $16\pi km^2$ com sinal de qualidade, é correto afirmar que o usuário dessa operadora que se encontrar:

A num dos lados do triângulo não terá sinal de qualidade.
B dentro da área delimitada pelo triângulo sempre terá um sinal de qualidade.
C no centro do triângulo não terá sinal de qualidade.
D a 4km de um dos vértices do triângulo não terá um sinal de qualidade.
E num dos vértices do triângulo não terá sinal de qualidade.

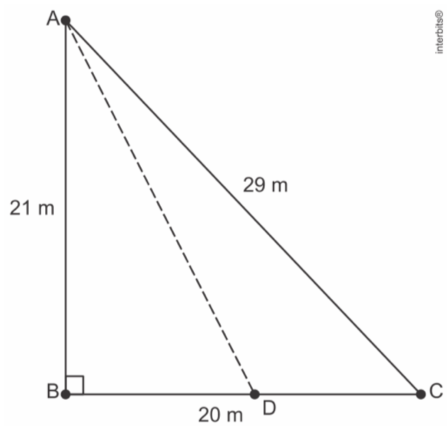
23. (IFSUL 2017)O projeto de madeiramento é fundamental para a construção de um bom telhado em uma residência. Na figura, temos a vista frontal do madeiramento de um telhado. O triângulo ABC é isósceles de base BC tal que Â = 120°. Observa-se também que os segmentos DE e FG são perpendiculares à base BC.



De acordo com os dados acima, a medida do ângulo é BÊD é

A 30°
B 45°
C 60°
D 75°
E 90°

24. (UFU 2016) Dois irmãos herdaram um terreno que, conforme consta no registro de imóvel, pode ser representado pelo triângulo retângulo ABC da figura a seguir.

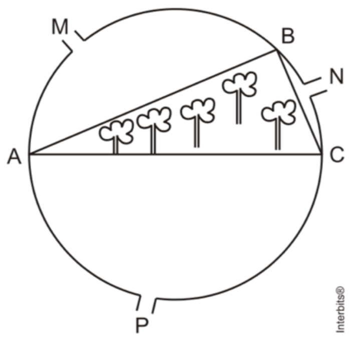


Os irmãos pretendem murar esse terreno e, ao mesmo tempo, dividi-lo por um muro, representado pelo segmento AD, em dois terrenos triangulares de mesma área. O preço de construção do metro quadrado de muro foi orçado em R$ 90,00, e em toda extensão o muro terá 3 m de altura.

A parte inteira do custo da construção do muro, em milhares de reais, é

Ⓐ 22
Ⓑ 23
Ⓒ 24
Ⓓ 25
Ⓔ 26

25. (CFTMG 2011) Um parque ecológico com formato circular, cujo diâmetro AC mede 500 metros, tem 3 entradas M, N e P que dão acesso ao espaço triangular ABC, reservado ao plantio de árvores, conforme figura abaixo.

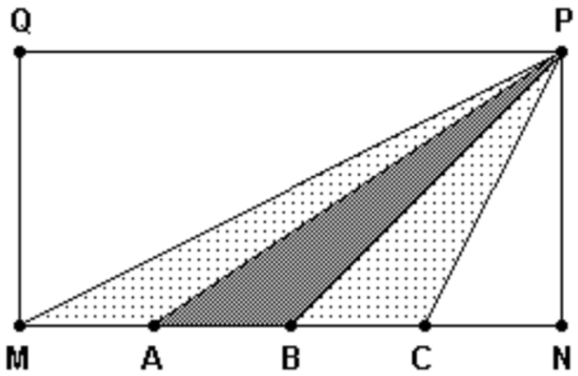


Considere $\pi = 3$

Se o lado BC do triângulo mede 300 m, então, a área do parque, externa ao espaço plantado, em m², é igual a

Ⓐ 93.700
Ⓑ 127.500
Ⓒ 147.500
Ⓓ 153.750
Ⓔ 162.800

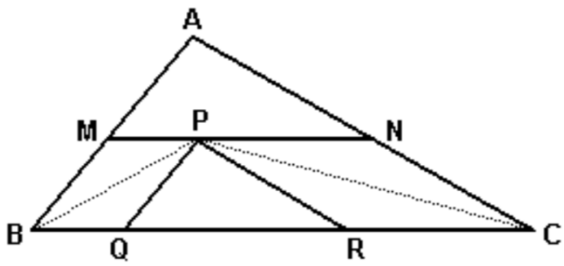
26. (UEL 2003) A bandeira de um time de futebol tem o formato de um retângulo MNPQ. Os pontos A, B e C dividem o lado MN em quatro partes iguais. Os triângulos PMA e PCB são coloridos com uma determinada cor C_1, o triângulo PAB com a cor C_2 e o restante da bandeira com a cor C_3.



Sabe- se que as cores C_1, C_2 e C_3 são diferentes entre si. Que porcentagem da bandeira é ocupada pela cor C_1?

Ⓐ 12,5%
Ⓑ 15%
Ⓒ 22,5%
Ⓓ 25%
Ⓔ 28,5%

27. (UFPI 2000 Adaptada)Um autódromo moderno é construído com pistas retilíneas que contornam os mais variados polígonos. A figura abaixo mostra um esquema das pistas.

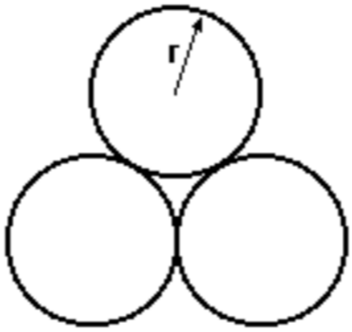


No triângulo ABC (figura abaixo), os lados AB, AC e BC representam pistas que possuem o comprimento de 5 km, 7 km e 9 km, respectivamente. Sabe-se que P é o ponto de encontro das bissetrizes dos ângulos B e C e que PQ//MB, PR//NC e MN//BC. O formato diferenciado do autódromo permite que existam circuitos com traçados distintos e consequentemente com comprimento de voltas diferentes.

Desprezando a largura das pistas, se escolhermos um circuito que dê voltas no triângulo AMN e outro que dê voltas ao redor do triângulo PQR teremos, respectivamente, voltas de comprimentos

Ⓐ 4km e 3km
Ⓑ 7km e 5km
Ⓒ 10km e 8km
Ⓓ 12km e 9km
Ⓔ 15km e 12km

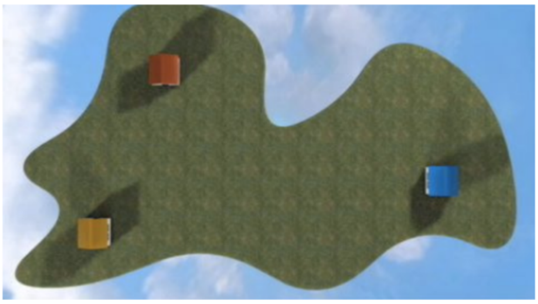
28. (UNICAMP 1991) Três canos de forma cilíndrica e de mesmo raio r, dispostos como indica a figura adiante, devem ser colocados dentro de outro cano cilíndrico de raio R, de modo a ficarem presos sem folga.



O valor de R em termos de r para que isso seja possível é

Ⓐ $R = 2r$
Ⓑ $R = 3r$
Ⓒ $R = r\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)$
Ⓓ $R = r\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$
Ⓔ $R = r\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

29. Fernandinho está com um problema em sua comunidade. Uma horta será montada e as três famílias envolvidas no mutirão desejam ficar a mesma distância dela. Sabe-se que as famílias residem em três casas distintas não alinhadas e que o terreno da cidade é praticamente plano.



Após alguns rabiscos, Fernandinho percebe que cada casa representa um vértice de um triângulo, e para que a horta equidiste das três casas, deverá ser construída em um ponto específico que não necessariamente está no interior desse triângulo.

Esse ponto é o

Ⓐ baricentro.
Ⓑ incentro.
Ⓒ circuncentro.
Ⓓ ortocentro.
Ⓔ exincentro.

30. Os parklets surgiram em São Francisco, nos EUA, em 2005, com o objetivo de gerar uma discussão sobre a igualdade do uso do solo. Em síntese, são mini praças que ocupam o lugar de uma ou duas vagas de estacionamento em vias públicas. São uma extensão da calçada que funcionam como um espaço público de lazer e convivência para qualquer um que passar por ali. Podem possuir bancos, mesas, palcos, floreiras, lixeiras, paraciclos, entre outros elementos de conforto e lazer.

Disponível em: <http://soulurbanismo.com.br/o-que-e-parklet-2/>

Um parklet diferente foi instalado em São Francisco, de tal forma que bancos contornam os três lados do seu formato triangular.

Na intenção de iluminar o espaço de convivência, deseja-se colocar um pequeno poste, no interior do triângulo de modo que a distância do poste a cada banco seja a mesma. Esse ponto específico do triangulo é o

Ⓐ baricentro.
Ⓑ incentro.
Ⓒ circuncentro.
Ⓓ ortocentro.
Ⓔ vértice.

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
11	A
12	C
13	E
14	C
15	C
16	A
17	A
18	B
19	C
20	E
21	A
22	C
23	C
24	D
25	B
26	D
27	D
28	D
29	C
30	B

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

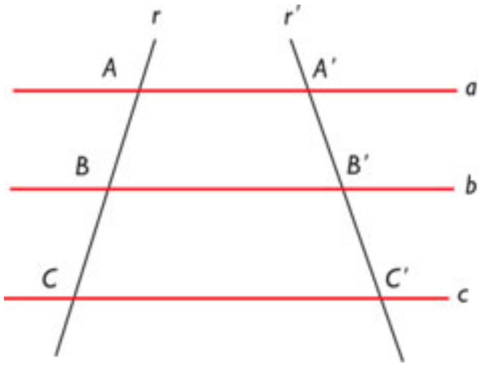
ANDERSON
MATEMÁTICA

O TEOREMA DE TALES

O Teorema de Tales é determinado pela intersecção entre retas paralelas e transversais, que formam segmentos proporcionais. Foi estabelecido por Tales de Mileto, que defendia a tese de que os raios solares que chegavam à Terra estavam na posição inclinados. Partindo desse principio básico observado na natureza, intitulou uma situação de proporcionalidade que relaciona as retas paralelas e as transversais.

Retas paralelas cortadas por retas transversais formam segmentos proporcionais.

Observe:



No esquema acima, as retas a, b e c são paralelas e as retas r e r' são transversais.

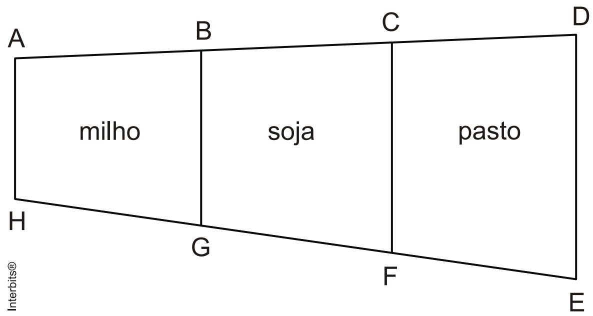
De acordo com o Teorema de Tales, temos as seguintes proporcionalidades:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad ou \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Observe que a relação estabelecida envolve noções de razão e proporção, o segmento AB está para o segmento BC assim como o segmento A'B' está para o segmento B'C'.

A igualdade entre as duas razões formam uma proporção, o cálculo dessa proporção será resolvido através de uma simples multiplicação cruzada, ou de acordo com a propriedade das proporções: o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

31. (CPS 2012) Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme a figura.

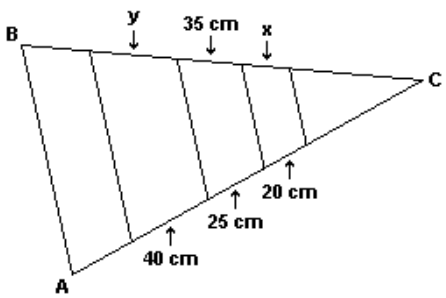


Considere que
– os pontos A, B, C e D estão alinhados;
– os pontos H, G, F e E estão alinhados;
– os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
– $AB = 500$ m, $BC = 600$ m, $CD = 700$ m e $HE = 1980$ m.

Nessas condições, a medida do segmento $\overline{GF}$ é, em metros,

Ⓐ 665.
Ⓑ 660.
Ⓒ 655.
Ⓓ 650.
Ⓔ 645.

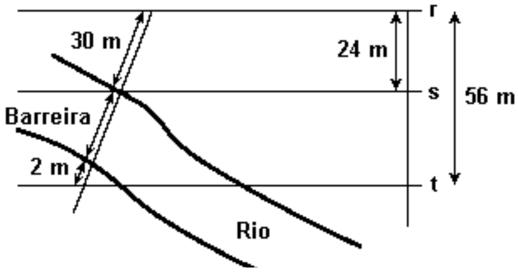
32. (CFTPR 2006) O jardineiro do Sr. Artur fez um canteiro triangular composto por folhagens e flores onde as divisões são todas paralelas à base AB do triângulo ABC, conforme figura.



Sendo assim, as medidas x e y dos canteiros de flores são, respectivamente:

Ⓐ 30 cm e 50 cm.
Ⓑ 28 cm e 56 cm.
Ⓒ 50 cm e 30 cm.
Ⓓ 56 cm e 28 cm.
Ⓔ 40 cm e 20 cm.

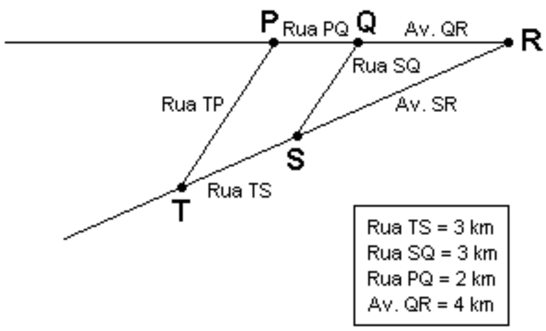
33. (UFSM 2003) A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações.



Observando a figura e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, pode-se afirmar que a barreira mede

Ⓐ 33 m
Ⓑ 38 m
Ⓒ 43 m
Ⓓ 48 m
Ⓔ 53 m

34. (UFF 2002) O circuito triangular de uma corrida está esquematizado na figura a seguir:

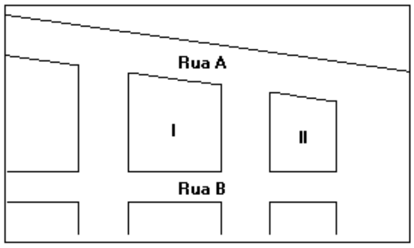


As ruas TP e SQ são paralelas. Partindo de S, cada corredor deve percorrer o circuito passando, sucessivamente, por R, Q, P, T, retornando, finalmente, a S.

Assinale a opção que indica o perímetro do circuito.

Ⓐ 4,5 km
Ⓑ 19,5 km
Ⓒ 20,0 km
Ⓓ 22,5 km
Ⓔ 24,0 km

35. (UNIRIO 1997)

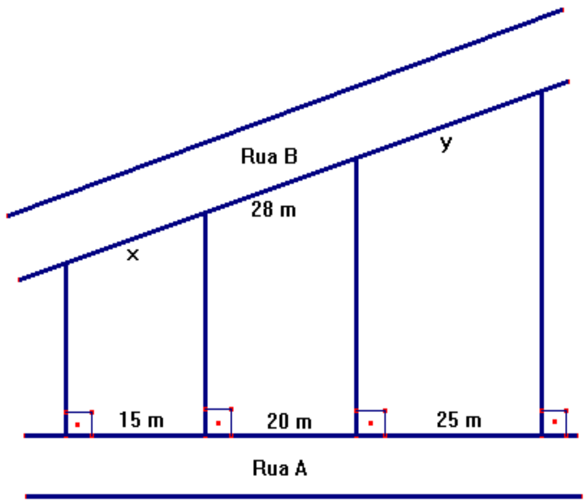


No desenho anterior apresentado, as frentes para a rua A dos quarteirões I e II medem, respectivamente, 250 m e 200 m, e a frente do quarteirão I para a rua B mede 40 m a mais do que a frente do quarteirão II para a mesma rua.

Sendo assim, pode-se afirmar que a medida, em metros, da frente do menor dos dois quarteirões para a rua B é:

Ⓐ 160
Ⓑ 180
Ⓒ 200
Ⓓ 220
Ⓔ 240

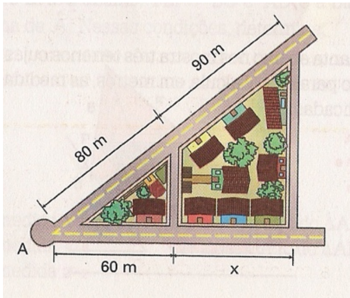
36. A figura ao lado indica três lotes de terreno com frente para a rua A e para rua B. as divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A, medem, respectivamente, 15 m, 20 m e 25 m. A frente do lote 2 para a rua B mede 28 m.



Qual é a medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?

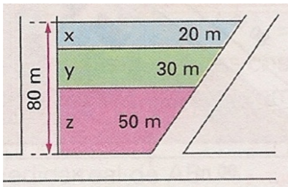
Ⓐ 6 m e 10 m
Ⓑ 21 m e 10 m
Ⓒ 21 m e 35 m
Ⓓ 6 m e 35 m
Ⓔ 35 m e 21 m

37. A figura abaixo nos mostra duas avenidas que partem de um mesmo ponto A e cortam duas ruas paralelas. Na primeira avenida, os quarteirões determinados pelas ruas paralelas tem 80 m e 90 m de comprimento, respectivamente. Na segunda avenida, um dos quarteirões determinados mede 60 m.



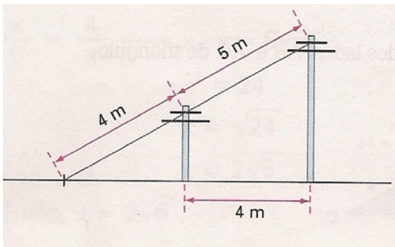
Qual o comprimento do outro quarteirão?

38. A planta abaixo no mostra três terrenos cujas laterais são paralelas.



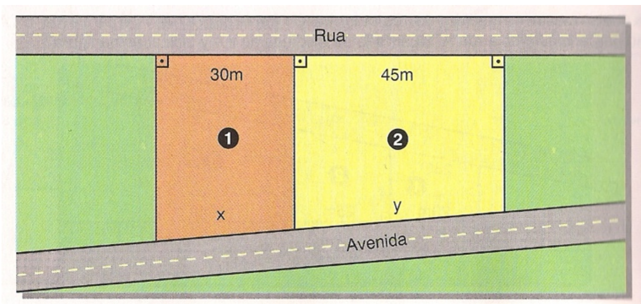
Calcule, em metros, as medidas x, y e z indicadas.

39. Dois postes perpendiculares ao solo estão a uma distância de 4 m um do outro, e um fio bem esticado de 5 m liga seus topos, como mostra a figura abaixo. Prolongando esse fio até prendê-lo no solo, são utilizados mais 4 m de fio.

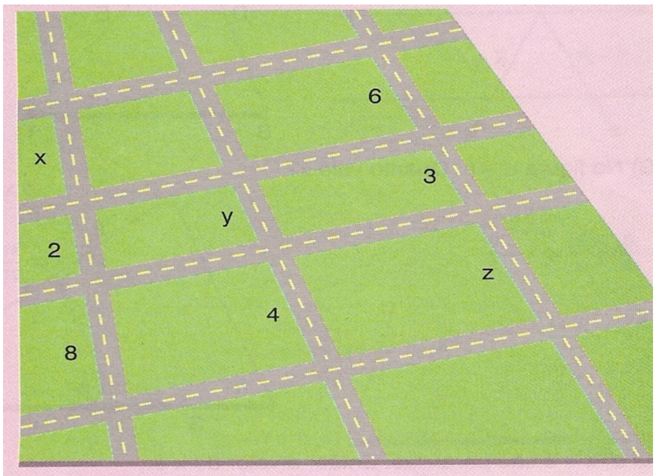


Determine a distância entre o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele.

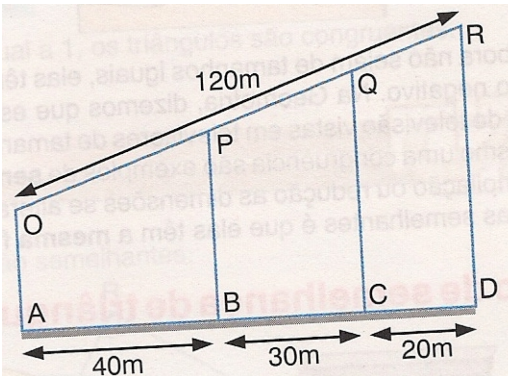
40. Esta planta mostra dois terrenos. As divisas laterais são perpendiculares à rua. Quais as medidas das frentes dos terrenos que dão para a avenida. Sabendo–se que a frente total para essa avenida é de 90 metros?



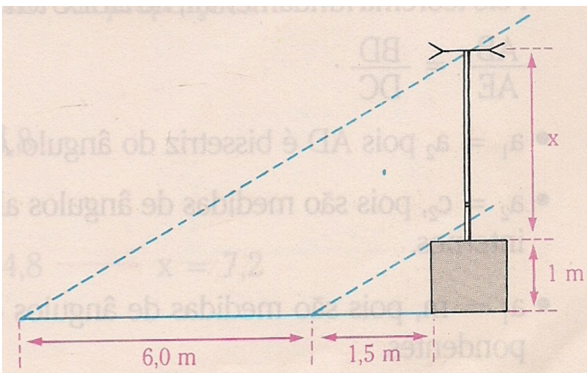
41. O mapa abaixo mostra quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Calcule as distâncias entre os cruzamentos dessas vias, supondo as medidas em km:



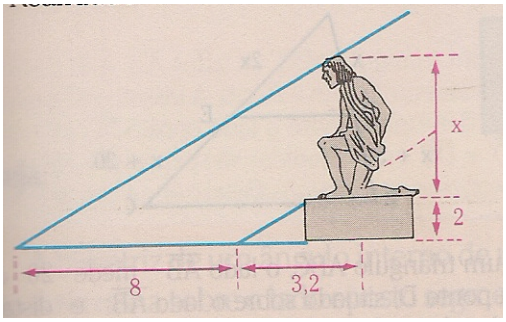
42. Nesta figura, os segmentos de retas $\overline{AO}$, $\overline{BP}$, $\overline{CQ}$e $\overline{DR}$ são paralelos. A medida do segmento $\overline{PQ}$, em metros, é:



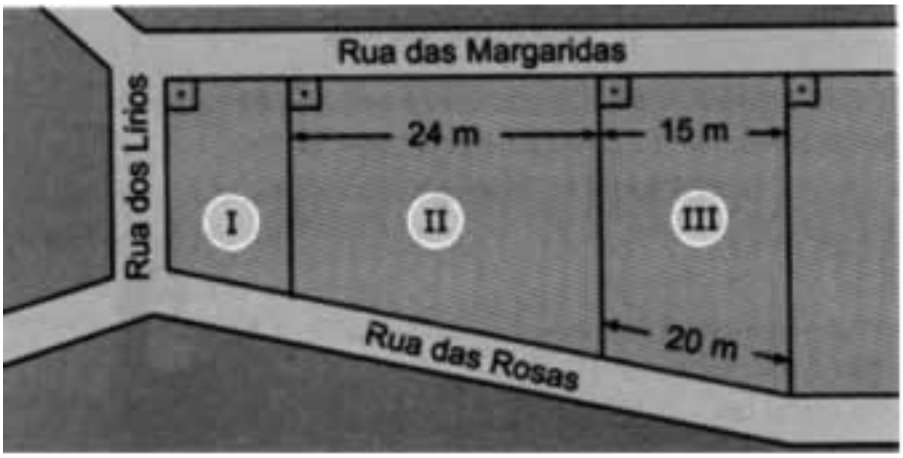
43. Uma antena de TV é colocada sobre um bloco de concreto. Esse bloco tem 1 m de altura. Em um certo instante, a antena projeta uma sombra de 6 m, enquanto o bloco projeta uma sombra de 1,5 m. Nessas condições, qual é a altura da antena?



44. Uma estátua projeta uma sombra de 8 m no mesmo instante que seu pedestal projeta uma sombra de 3,2 m. Se o pedestal tem 2 m de altura, determinar a altura da estátua.



45. (Saresp–SP) No desenho abaixo estão representados os terrenos I, II e III.

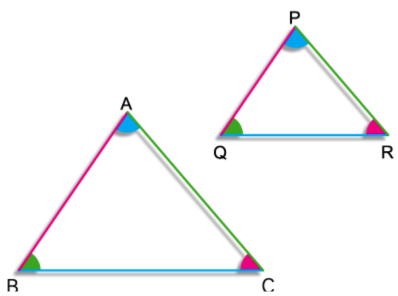


Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno II construirá para fechar o lado que faz frente com a Rua das Rosas?

SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

DEFINIÇÃO

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.



A semelhança entre os triângulos ABC e PQR será simbolicamente indicada por:

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

Assim, temos:

$$\Delta ABC \sim \Delta PQR \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{P}\,;\ \hat{B} \cong \hat{Q}\,;\ \hat{C} \cong \hat{R} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} = \dfrac{AC}{PR} = k \end{cases}$$

O número k é denominado razão de semelhança dos triângulos.

Se k = 1, então os triângulos são congruentes.

OBSERVAÇÕES

a) Para indicarmos a semelhança dos triângulos, a escolha da ordem dos vértices do primeiro triângulo é qualquer, porém a ordem dos vértices do segundo obedece à mesma sequência do primeiro.

Assim, nos triângulos das figuras da tela anterior, teremos:

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

ou

$\Delta CAB \sim \Delta RPQ$

ou

$\Delta BCA \sim \Delta QRP$

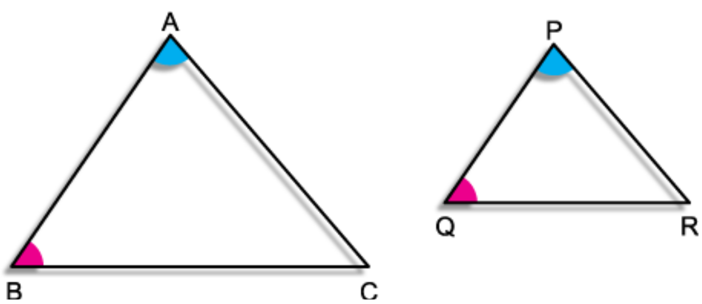
b) Para facilitar a resolução de problemas envolvendo semelhança, é interessante destacar os triângulos semelhantes.

CRITÉRIOS DE SEMELHANÇA

Os critérios de semelhança permitem concluir que dois triângulos são semelhantes a partir de duas ou três condições apenas.

1º CRITÉRIO: (AA~)

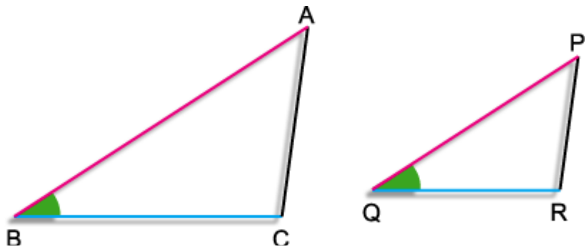
"Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então são semelhantes."



$$\left.\begin{matrix} \hat{A} \cong \hat{P} \\ \hat{B} \cong \hat{Q} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

2º CRITÉRIO: (LAL ~)

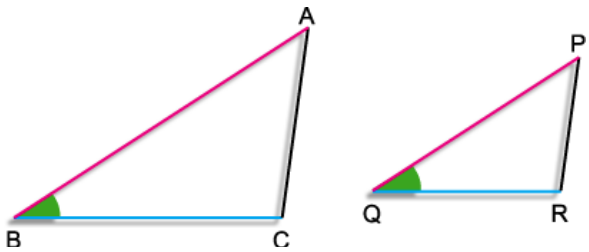
"Se dois triângulos possuem dois lados correspondentes ordenadamente proporcionais e o ângulo compreendido entre esses lados é congruente, então os triângulos são semelhantes."



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

3º CRITÉRIO: (LLL~)

"Se dois triângulos têm os três lados correspondentes ordenadamente proporcionais, então os triângulos são semelhantes."



$$\left.\begin{array}{l} \hat{B} \cong \hat{Q} \\ \dfrac{AB}{PQ} = \dfrac{BC}{QR} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

OBSERVAÇÃO

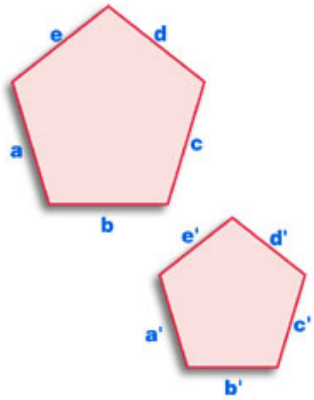
Se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então a razão entre dois elementos lineares correspondentes quaisquer é k.

EXEMPLOS

Se a razão de semelhança de dois triângulos é 2, então a razão entre as medianas correspondentes é 2, a razão entre as alturas correspondentes é 2, etc.

POLÍGONOS SEMELHANTES

Dois polígonos são semelhantes quando possuem o mesmo número de lados e é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices tal que os ângulos correspondentes sejam côngruos e os lados correspondentes, proporcionais.



Assim, se os polígonos das figuras são semelhantes, temos:

$$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta PQR$$

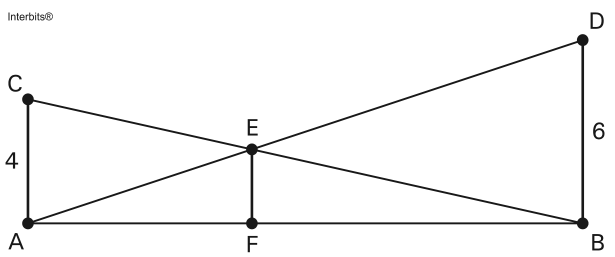
OBSERVAÇÕES

a) Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes.

b) Em polígonos semelhantes, todas as medidas de segmentos correspondentes estão na mesma razão, que é a razão de semelhança.

c) A razão entre os perímetros de dois polígonos semelhantes é igual à razão de semelhança entre os polígonos.

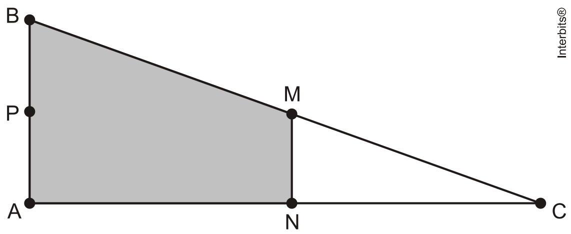
46. (ENEM 2013) O dono de um sítio pretende colocar uma haste de sustentação para melhor firmar dois postes de comprimentos iguais a 6m e 4m. A figura representa a situação real na qual os postes são descritos pelos segmentos AC e BD e a haste é representada pelo EF, todos perpendiculares ao solo, que é indicado pelo segmento de reta AB. Os segmentos AD e BC representam cabos de aço que serão instalados.



Qual deve ser o valor do comprimento da haste EF?

Ⓐ 1 m   Ⓑ 2 m   Ⓒ 2,4 m   Ⓓ 3 m   Ⓔ $2\sqrt{6}$ m

47. (ENEM 2010) Em canteiros de obras de construção civil é comum perceber trabalhadores realizando medidas de comprimento e de ângulos e fazendo demarcações por onde a obra deve começar ou se erguer. Em um desses canteiros foram feitas algumas marcas no chão plano. Foi possível perceber que, das seis estacas colocadas, três eram vértices de um triângulo retângulo e as outras três eram os pontos médios dos lados desse triângulo, conforme pode ser visto na figura, em que as estacas foram indicadas por letras.

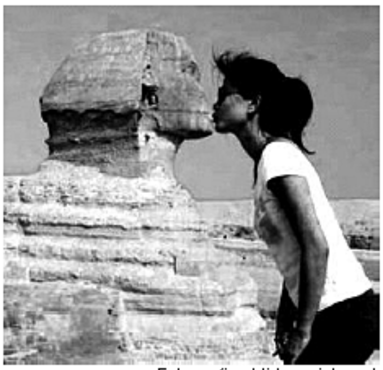


A região demarcada pelas estacas A, B, M e N deveria ser calçada com concreto.

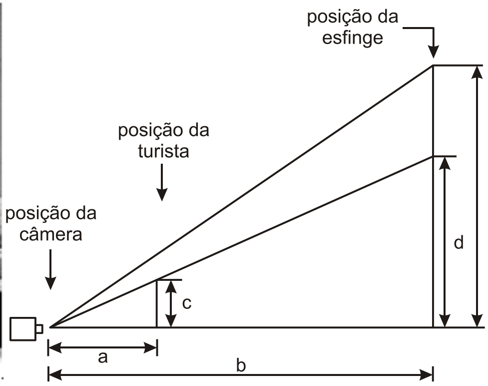
Nessas condições, a área a ser calcada corresponde

- **A** a mesma área do triângulo AMC.
- **B** a mesma área do triângulo BNC.
- **C** a metade da área formada pelo triângulo ABC.
- **D** ao dobro da área do triângulo MNC.
- **E** ao triplo da área do triângulo MNC.

48. (ENEM 2009) A fotografia mostra uma turista aparentemente beijando a esfinge de Gizé, no Egito. A figura a seguir mostra como, na verdade, foram posicionadas a câmera fotográfica, a turista e a esfinge.



Fotografia obtida na internet.



Medindo-se com uma régua diretamente na fotografia, verifica-se que a medida do queixo até o alto da cabeça da turista é igual a $\frac{2}{3}$ da medida do queixo da esfinge até o alto da sua cabeça. Considere que essas medidas na realidade são representadas por d e d’, respectivamente, que a distância da esfinge à lente da câmera fotográfica, localizada no plano horizontal do queixo da turista e da esfinge, é representada por b, e que a distância da turista à mesma lente, por a.

A razão entre b e a será dada por

A $\frac{b}{a} = \frac{d'}{c}$ **B** $\frac{b}{a} = \frac{2d}{3c}$ **C** $\frac{b}{a} = \frac{3d'}{2c}$ **D** $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{3c}$ **E** $\frac{b}{a} = \frac{2d'}{c}$

49. (ENEM 2009) A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro.

A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é

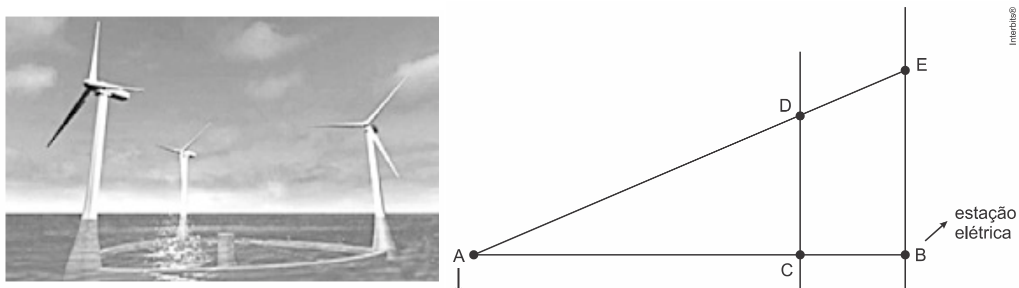
Ⓐ 1,16 metros.
Ⓑ 3,0 metros.
Ⓒ 5,4 metros.
Ⓓ 5,6 metros.
Ⓔ 7,04 metros.

50. (ENEM 1998) A sombra de uma pessoa que tem $1{,}80\text{m}$ de altura mede 60cm. No mesmo momento, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede $2{,}00\text{m}$.

Se, mais tarde, a sombra do poste diminuiu 50cm, a sombra da pessoa passou a medir:

Ⓐ 30cm.
Ⓑ 45cm.
Ⓒ 50cm.
Ⓓ 80cm.
Ⓔ 90cm.

51 (CPS 2016) Os parques eólicos marítimos apresentam vantagens em relação aos parques eólicos terrestres, pois neles não há problema com o impacto sonoro e o desgaste das turbinas é menor, devido a menor turbulência do vento. Na instalação dos parques eólicos marítimos, é preciso calcular sua distância até o continente, a fim de instalar os cabos condutores de eletricidade. Observe o esquema que representa um parque eólico (A), uma estação elétrica (B) no continente e pontos auxiliares C, D e E para o cálculo da distância do parque eólico até a estação elétrica no continente.



<http://tinyurl.com/jaz8hlw> Acesso em: 10.03.2016.
Original colorido.

No esquema temos: Ponto A: parque eólico marítimo; Ponto B: estação elétrica no continente; Ponto C: ponto auxiliar $(C \in \overline{AB})$; Ponto D: ponto auxiliar $(D \in \overline{AE})$; Ponto E: ponto auxiliar; A medida do segmento $\overline{CD}$ é 150 metros; A medida do segmento $\overline{BC}$ é 100 metros; A medida do segmento $\overline{BE}$ é 200 metros; Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são paralelos entre si.

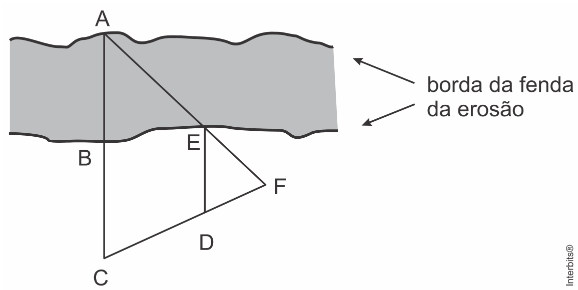
Assim sendo, é correto afirmar que a distância do parque eólico marítimo até a estação elétrica no continente é, em metros,

Ⓐ 75. Ⓑ 100. Ⓒ 300. Ⓓ 400. Ⓔ 425.

52. (CPS 2016) A erosão é o processo de desgaste, transporte e sedimentação das rochas e, principalmente, dos solos. Ela pode ocorrer por ação de fenômenos da natureza ou do ser humano. A imagem mostra uma fenda no solo, proveniente de erosão.

<http://tinyurl.com/pdqj75z> Acesso em: 25.08.2015.
Original colorido.

Para determinar a distância entre os pontos A e B da fenda, pode-se utilizar o modelo matemático da figura.



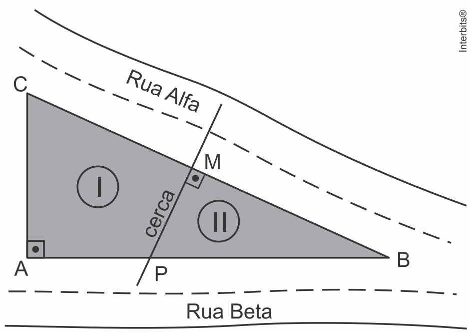
Na figura, tem-se:

- os triângulos AFC e EFD;
- o ponto E pertencente ao segmento $\overline{AF}$;
- o ponto D pertencente ao segmento $\overline{CF}$;
- os pontos C, D e F pertencentes ao terreno plano que margeia a borda da fenda; e
- as retas $\overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{ED}$ que são paralelas entre si.

Sabendo-se que $BC = 5$ m, $CD = 3$ m, $DF = 2$ m e $ED = 4,5$ m, então, a distância entre os pontos A e B é, em metros,

A) 6,25.
B) 6,50.
C) 6,75.
D) 7,25.
E) 7,75.

53. (EPCAR 2016) Um terreno com formato de um triângulo retângulo será dividido em dois lotes por uma cerca feita na mediatriz da hipotenusa, conforme mostra figura.



Sabe-se que os lados AB e BC desse terreno medem, respectivamente, 80 m e 100 m. Assim, a razão entre o perímetro do lote I e o perímetro do lote II, nessa ordem, é

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{10}{11}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{11}{10}$

54. (CP2 2016) Observe a imagem (Figura 1) produzida pelo Observatório Astronômico de Lisboa (OAL) do eclipse total ocorrido no mês de setembro de 2015. Nela percebe-se a existência de um cone de sombra.

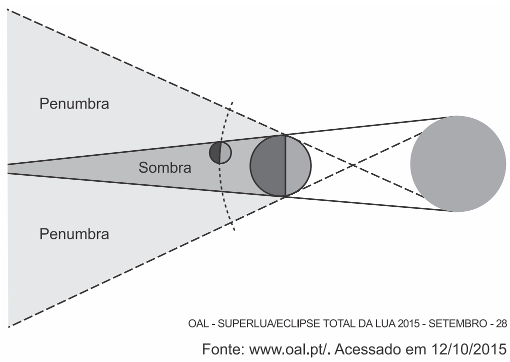


Figura 1

A partir desta imagem, foi construído o esquema matemático apresentado na Figura 2:

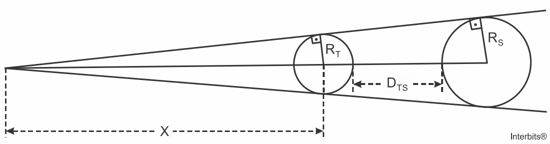
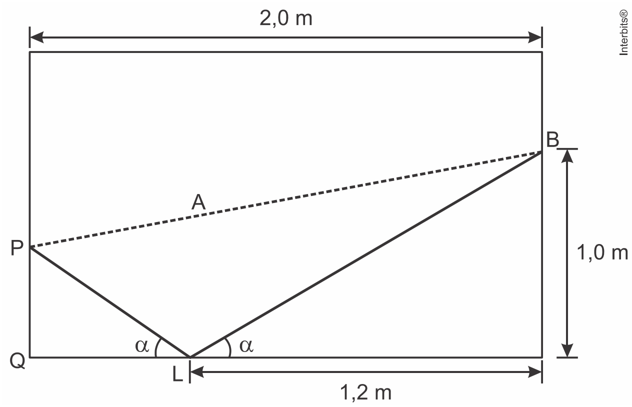


Figura 2

Com base no esquema da Figura 2, e sabendo que os raios da Terra (RT) e do Sol (RS) medem, aproximadamente, 6.000 km e 690.000 km, respectivamente, e que a distância entre Terra e Sol (DTS) é de $150.000.000\text{ km}$, então o comprimento aproximado da altura x desse cone de sombra é de

A) 570.000 km. B) 800.000 km. C) 1.300.000 km. D) 1.500.000 km.

55. (CFTMG 2015) A ilustração a seguir representa uma mesa de sinuca retangular, de largura e comprimento iguais a $1,5$ e $2,0\,m$, respectivamente. Um jogador deve lançar a bola branca do ponto B e acertar a preta no ponto P, sem acertar em nenhuma outra, antes. Como a amarela está no ponto A, esse jogador lançará a bola branca até o ponto L, de modo que a mesma possa rebater e colidir com a preta.



Se o ângulo da trajetória de incidência da bola na lateral da mesa e o ângulo de rebatimento são iguais, como mostra a figura, então a distância de P a Q, em cm, é aproximadamente

- Ⓐ 67
- Ⓑ 70
- Ⓒ 74
- Ⓓ 81

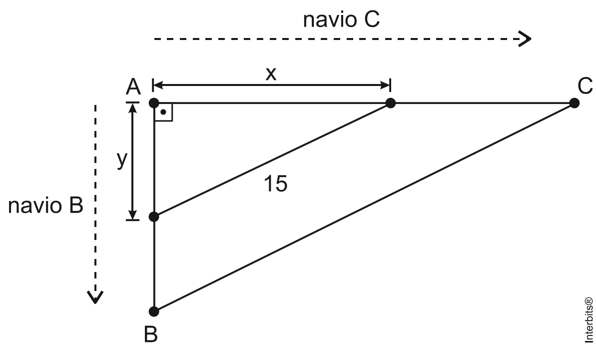
56. (CFTMG 2014) Numa festa junina, além da tradicional brincadeira de roubar bandeira no alto do pau de sebo, quem descobrisse a sua altura ganharia um prêmio. O ganhador do desafio fincou, paralelamente a esse mastro, um bastão de 1m. Medindo-se as sombras projetadas no chão pelo bastão e pelo pau, ele encontrou, respectivamente, 25 dm e 125 dm.

Portanto, a altura do "pau de sebo", em metros, é

- Ⓐ 5,0.
- Ⓑ 5,5.
- Ⓒ 6,0.
- Ⓓ 6,5.

57. (UEA 2014) Potencialmente, os portos da região Norte podem ser os canais de escoamento para toda a produção de grãos que ocorre acima do paralelo 16 Sul, onde estão situados gigantes do agronegócio. Investimentos em logística e a construção de novos terminais portuários privados irão aumentar consideravelmente o número de toneladas de grãos embarcados anualmente.

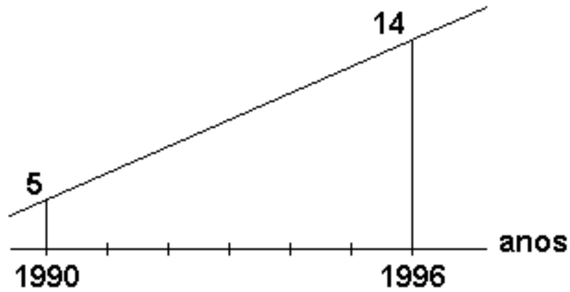
Suponha que dois navios tenham partido ao mesmo tempo de um mesmo porto A, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Sabe-se que a velocidade do navio B é de $18\ \text{km/h}$ e que, com 30 minutos de viagem, a distância que o separa do navio C é de $15\ \text{km}$, conforme mostra a figura:



Desse modo, pode-se afirmar que, com uma hora de viagem, a distância, em km, entre os dois navios e a velocidade desenvolvida pelo navio C, em km/h, serão, respectivamente,

Ⓐ 30 e 25.
Ⓑ 25 e 22.
Ⓒ 30 e 24.
Ⓓ 25 e 20.
Ⓔ 25 e 24.

58. (UEL 1998) O gráfico a seguir mostra a atividade de café, em milhões de toneladas, em certo município do estado do Paraná.

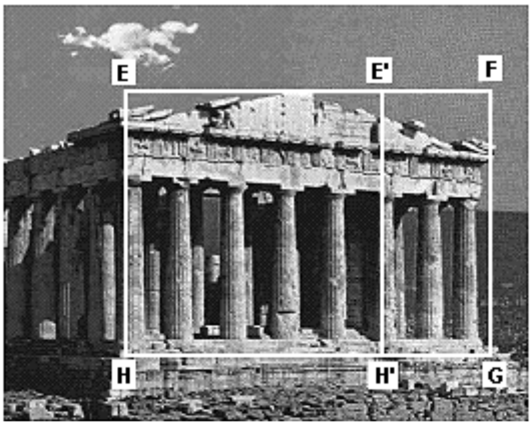


De acordo com o gráfico, é correto afirmar que, em 1994, a produção de café nesse município foi, em milhões de toneladas,

Ⓐ 9,5
Ⓑ 9
Ⓒ 10,5
Ⓓ 11
Ⓔ 12,5

59. (UFRN 2004) Phidias, um arquiteto grego que viveu no século quinto a.C., construiu o Parthenon com medidas que obedeceram à proporção áurea, o que significa dizer que EE'H'H é um quadrado e que os retângulos EFGH e E'FGH' são semelhantes, ou seja, o lado maior do primeiro retângulo está para o lado maior do segundo retângulo assim como o lado menor do primeiro retângulo está para o lado menor do segundo retângulo.

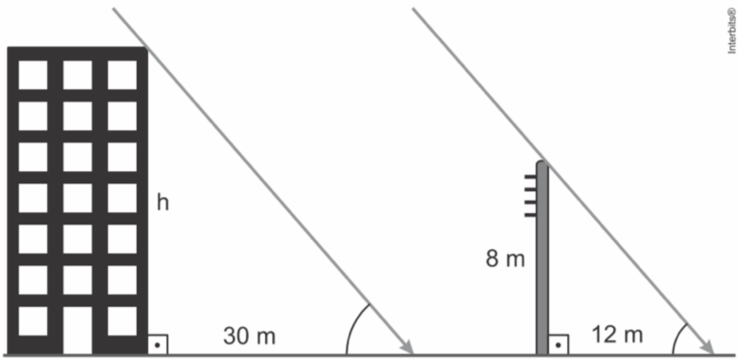
Veja a figura abaixo.



Assim, podemos afirmar que a razão da medida da base do Parthenon pela medida da sua altura é uma raiz do polinômio:

Ⓐ $x^2 + x + 1$
Ⓑ $x^2 + x - 1$
Ⓒ $x^2 - x - 1$
Ⓓ $x^2 - x + 1$

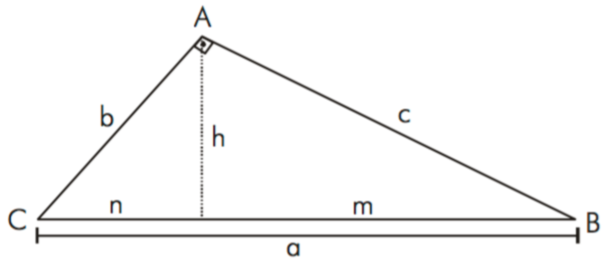
60. (IFPE 2017) Às 10h45min de uma manhã ensolarada, as sombras de um edifício e de um poste de 8 metros de altura foram medidas ao mesmo tempo. Foram encontrados 30 metros e 12 metros, respectivamente, conforme ilustração abaixo.



De acordo com as informações acima, a altura h do prédio é de

Ⓐ 12 metros.
Ⓑ 18 metros.
Ⓒ 16 metros.
Ⓓ 14 metros.
Ⓔ 20 metros.

Dado o triângulo retângulo ABC abaixo:



Temos:

- ***c*** e ***b*** são os catetos;
- ***a é*** a hipotenusa;
- ***h*** é a altura relativa a hipotenusa ***a***;
- ***m*** é projeção ortogonal do cateto ***c*** e
- ***n*** é a projeção ortogonal do cateto ***b***.

Temos as seguintes relações:

- O quadrado de cada cateto é igual ao produto da hipotenusa pela projeção do cateto correspondente:

$$c^2 = a \cdot m \text{ e } b^2 = a \cdot n$$

- Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- O produto de um dos catetos pela altura é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro cateto sobre a hipotenusa:

$$b \cdot h = c \cdot n \text{ e } c \cdot h = b \cdot m$$

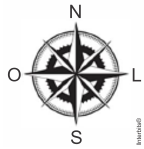
- O quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto das projeções de cada cateto:

$$h^2 = m \cdot n$$

- O produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à ela:

$$b \cdot c = a \cdot h$$

61. (IFPE 2016) Francisco decidiu fazer uma brincadeira com seus filhos. Montou um mapa do tesouro com algumas instruções e disse-lhes que, ao chegar ao ponto final, encontrariam um belo prêmio. As instruções foram: 1. ande 200 metros na direção NORTE; 2. ande 120 metros na direção LESTE; 3. ande 50 metros na direção SUL; 4. ande 40 metros na direção OESTE.

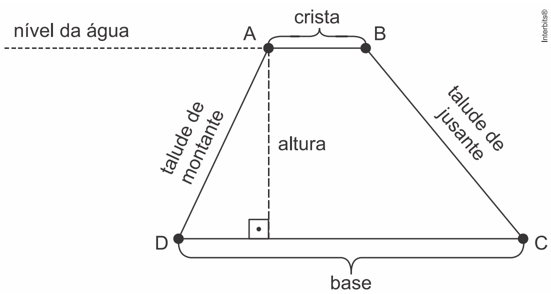


Luiz, um de seus filhos, decidiu colocar em prática o que acabara de aprender na escola. Em alguns minutos, ele descobriu qual seria a menor distância entre o ponto de partida e o ponto de chegada mostrado no mapa.

Assim sendo, a distância calculada por Luiz foi de

Ⓐ 170 metros.
Ⓑ 150 metros.
Ⓒ 180 metros.
Ⓓ 200 metros.
Ⓔ 210 metros.

62. (CPS 2016) As barragens são elementos fundamentais para as usinas hidrelétricas.



O trapézio $ABCD$ da imagem é um modelo matemático que representa um corte vertical de uma barragem. Na imagem, a crista mede 10 metros, a altura mede 12 metros, o talude de montante mede 13 metros e o talude de jusante mede 15 metros.

Para calcular a medida da base, podemos dividir a figura em outros polígonos, como triângulos. Assim, considere um primeiro triângulo retângulo que tem como hipotenusa o talude de montante e como catetos a altura e uma parte da base, com medida x. Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, temos:

$$x^2 + 12^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 + 144 = 169 \Rightarrow x^2 = 169 - 144 \Rightarrow x^2 = 25$$

Como procuramos uma medida, o valor será positivo, então $x = 5$.

Considere também, um segundo triângulo retângulo que tem como hipotenusa o talude de jusante e como catetos a altura e outra parte da base, com medida y.

Após aplicar o Teorema de Pitágoras no segundo triângulo descrito, podemos concluir que a medida da base do trapézio é, em metros,

Ⓐ 5.
Ⓑ 9.
Ⓒ 14.
Ⓓ 24.
Ⓔ 50.

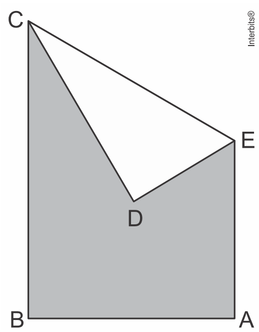
63. (IFPE 2016) Um fio foi esticado entre as extremidades de duas torres de transmissão. Sabendo que a torre menor tem 16m de altura, a torre maior tem 21m de altura e que a distância entre as duas torres é de 12m, qual é o comprimento do fio?

Ⓐ 13 m
Ⓑ 5 m
Ⓒ 37 m
Ⓓ 12 m
Ⓔ 10 m

64. (UPF 2016) Considere a área de uma folha de papel A4, com 297 mm de comprimento e 210 mm de largura. Dobrando ao meio a folha de papel por sucessivas vezes, são formados retângulos cada vez menores. A tabela a seguir relaciona as medidas e a área dos retângulos obtidos a cada dobragem.

Nº de dobragens	**1**	**2**	**3**	**4**
Largura (mm)	148,5	105	74,25	52,5
Comprimento (mm)	210	148,5	105	74,25
Área (mm²)	**31185**	**15592,5**	**7796,25**	**3898,125**

A folha de papel A4 foi dobrada como mostra a figura a seguir.

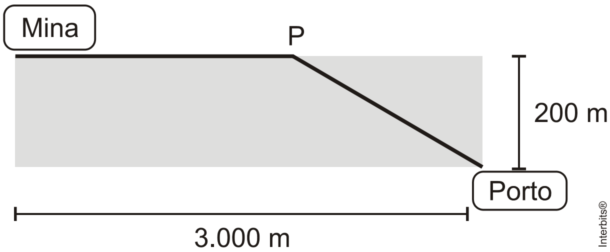


Se o comprimento do segmento AE é 177 mm, a medida do segmento CE e a área do polígono $ABCDE$ são, respectivamente:

Ⓐ $30\sqrt{65}\text{ mm}$ e 37.170 mm^2.
Ⓑ $30\sqrt{65}\text{ mm}$ e 49.770 mm^2.
Ⓒ $3\sqrt{13}\text{ mm}$ e 49.770 mm^2.
Ⓓ $20\sqrt{10}\text{ mm}$ e 37.170 mm^2.
Ⓔ $3\sqrt{10}\text{ mm}$ e 35.070 mm^2.

65. (PUCPR 2015) Um mineroduto é uma extensa tubulação para levar minério de ferro extraído de uma mina até o terminal de minério para beneficiamento. Suponha que se pretenda instalar um mineroduto em uma mina que está à margem de um rio com 200 metros de largura até um porto situado do outro lado do rio, 3.000 metros abaixo. O custo para instalar a tubulação no rio é $R\$10,00$ o metro e o custo para instalar a tubulação em terra é $R\$6,00$ o metro. Estudos mostram que, neste caso, o custo será minimizado se parte do duto for instalada por terra e parte pelo rio.

Determine o custo de instalação do duto em função de x, em que x é a distância da mina até o ponto P, como mostra a figura.



A) $C(x) = 6x + 10(200 + (3000 - x))$

B) $C(x) = 6\sqrt{200^2 + (3000 - x)^2} + 10x$

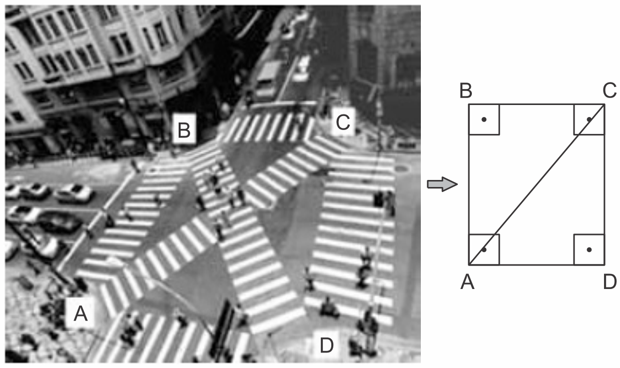
C) $C(x) = 4\sqrt{200^2 + (3000 - x)^2}$

D) $C(x) = 6x + 10\sqrt{200^2 + (3000 - x)^2}$

E) $C(x) = 10\sqrt{200^2 + (3000 - x)^2}$

66. (UNESP 2015) Em 2014, a Companhia de Engenharia de Tráfego (CET) implantou duas faixas para pedestres na diagonal de um cruzamento de ruas perpendiculares do centro de São Paulo.

Juntas, as faixas formam um 'X', como indicado na imagem. Segundo a CET, o objetivo das faixas foi o de encurtar o tempo e a distância da travessia.



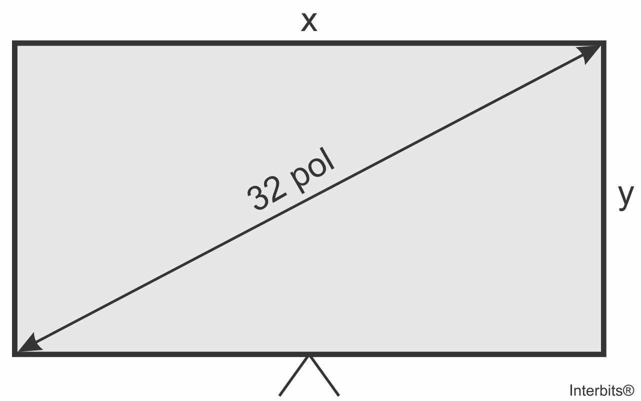
(http://ciclovivo.com.br. Adaptado.)

Antes da implantação das novas faixas, o tempo necessário para o pedestre ir do ponto A até o ponto C era de 90 segundos e distribuía-se do seguinte modo: 40 segundos para atravessar $\overline{AB}$, com velocidade média v; 20 segundos esperando o sinal verde de pedestres para iniciar a travessia $\overline{BC}$; e 30 segundos para atravessar $\overline{BC}$, também com velocidade média v.

Na nova configuração das faixas, com a mesma velocidade média v, a economia de tempo para ir de A até C, por meio da faixa $\overline{AC}$, em segundos, será igual a

A) 20.
B) 30.
C) 50.
D) 10.
E) 40.

67. (PUCRS 2015) Considere a figura e o texto abaixo.



As medidas de comprimento e largura da tela de uma televisão, em geral, obedecem à proporção $16:9$, sendo que o número de polegadas $(1\,\text{pol} = 2{,}5\text{ cm})$ desse aparelho indica a medida da diagonal de sua tela.

Considerando essas informações, as medidas do comprimento e da largura, em centímetros, de uma TV de 32 polegadas, como mostra a figura acima, podem ser obtidas com a resolução do seguinte sistema:

Ⓐ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

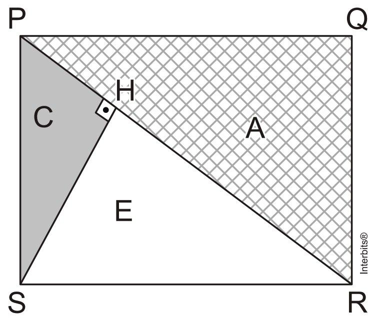
Ⓑ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 32 \end{cases}$

Ⓒ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 1024 \end{cases}$

Ⓓ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{9}{16} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$

Ⓔ $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{16}{9} \\ x^2 + y^2 = 6400 \end{cases}$

68. (IFSP 2014) Um restaurante foi representado em sua planta por um retângulo PQRS. Um arquiteto dividiu sua área em: cozinha (C), área de atendimento ao público (A) e estacionamento (E), como mostra a figura abaixo.



Sabendo que P, H e R são colineares, que $\overline{PH}$ mede 9 m e que $\overline{SH}$ mede 12 m, a área total do restaurante, em metros quadrados, é

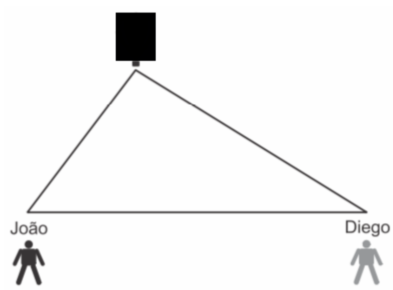
- Ⓐ 150.
- Ⓑ 200.
- Ⓒ 250.
- Ⓓ 300.
- Ⓔ 350.

69. (CP2 2017) "Diferente dos balões comuns, os balões meteorológicos são produzidos com borracha natural usando um processo de rotomoldagem. Isso quer dizer que toda a superfície do balão apresenta a mesma espessura, evitando estouros prematuros."

Fonte: http://www.mundoclima.com.br/baloes- meteorologicos/balao-meteorologico-de-grande-altitude-600g/. Acesso em: 15 de maio de 2016.

Dois jovens pesquisadores, João e Diogo, decidiram lançar um único balão meteorológico para fazer um estudo. Após o lançamento, em um dado momento, João estava a 8 km do balão e Diogo a 15km. Sabe-se que o balão subiu verticalmente durante todo o percurso e que a distância entre os pesquisadores naquele momento era de 17 km.

Observe a figura abaixo, representativa da situação:

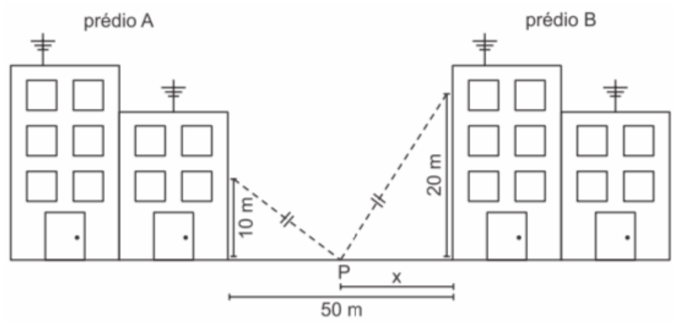


Desconsiderando a curvatura da Terra, pode-se afirmar que a altura aproximada desse balão era de

- Ⓐ 6km.
- Ⓑ 6,5km.
- Ⓒ 7km.
- Ⓓ 7,5km.

70. Duas crianças, cada uma em um prédio diferente, brincam com canetas lasers nas janelas de seus apartamentos, apontando para um ponto na quadra situada entre os prédios. A criança do prédio A está a uma altura de 10 m, e a do prédio B, a uma altura de 20m do chão. A distância entre os prédios é de 50 m.

Em um determinado momento, os lasers das crianças atingem, simultaneamente, um ponto P do pátio equidistante das crianças, tal como na ilustração abaixo:



A distância x, em metros, deste ponto até o prédio B é

Ⓐ 22.
Ⓑ 23.
Ⓒ 25.
Ⓓ 28.

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
31	***B***
32	***B***
33	***B***
34	***B***
35	***A***
36	***C***
37	***67,5m***
38	***16m, 24m e 40m***
39	***3,2m***
40	***36m e 54m***
41	***x = 4, y = 1 e z = 12***
42	***40m***
43	***4m***
44	***5m***
45	***32m***
46	***C***
47	***E***
48	***D***
49	***D***
50	***B***
51	***D***
52	***A***
53	***D***
54	***C***
55	***A***
56	***A***
57	***C***
58	***D***
59	***C***
60	***E***
61	***A***
62	***D***
63	***A***
64	***A***
65	***D***
66	***E***
67	***E***
68	***D***
69	***C***
70	***A***

GEOMETRIA PLANA

QUADRILÁTEROS

ANDERSON
MATEMÁTICA

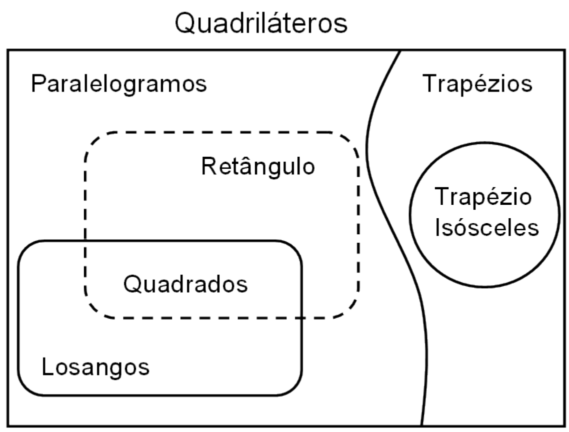
QUADRILÁTEROS

O livro "*Geometria Euclidiana Plana*" de João Lucas Marques Barbosa é um dos mais vendidos da Sociedade Brasileira de Matemática a cada ano, desde 1985. É tido como o livro que aborda a geometria axiomática de forma mais acessível para um educando iniciante nos estudos da Geometria Plana Euclidiana. Atualmente é o livro adotado por várias universidades para a formação de professores de Matemática na cadeira de Geometria Plana. Dessa forma, foi escolhido para a análise das definições dos quadriláteros.

As definições seguintes foram adotadas por João Lucas neste livro:

- **Um paralelogramo** é um quadrilátero cujos lados opostos são paralelos (p. 91).
- **Um retângulo** é um quadrilátero que tem todos os seus ângulos, retos (p. 98).
- **Um losango** (também denominado rombo) é um paralelogramo que tem todos os seus lados congruentes (p. 98).
- **Um quadrado** é um retângulo que também é um losango (p. 98).
- **Um trapézio** é um quadrilátero em que dois lados opostos são paralelos. Os lados paralelos de um trapézio são chamados bases e os outros dois são denominados de laterais (p. 98).

Em resumo João Lucas M. B. classifica os quadriláteros conforme exposto abaixo:



Note que existem matemáticos que consideram o conjunto dos quadriláteros como uma bipartição por disjunção, ou seja, não existem paralelogramos que são trapézios e vice e versa.

Isto **não** anula a existência de estudos e literaturas que discutam a possibilidade de o conjunto dos paralelogramos ser um subconjunto do conjunto dos trapézios.

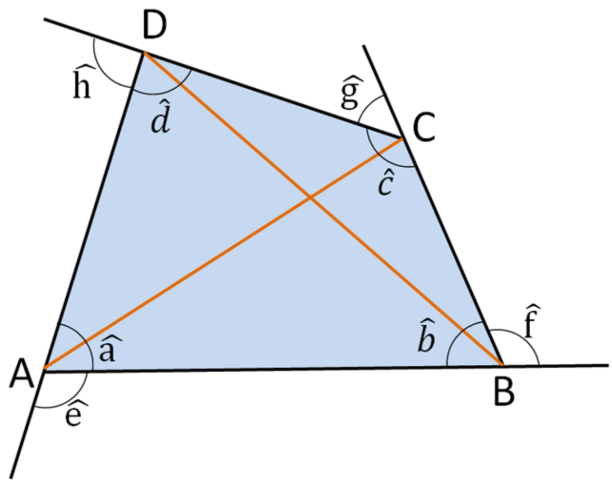
É o caso dos estudos dos matemáticos: Guy Laville; Fritz Reinhardt et Heinrich Soeder em seu Atlas des Mathématiques; Vicenzo Bongiovanni na Revista do Professor de Matemática, Nª 72 e José Adelino Serrasqueiro no seu Tratado de Geometria Elementar.

DEFINIÇÃO

Um quadrilátero $ABCD$ é o polígono simples de quatro lados obtido da reunião $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$.

ELEMENTOS

Identificamos os seguintes elementos em um quadrilátero $ABCD$:



- **Vértices**: os pontos A, B, C e D;
- **Lados:** os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$;
- **Diagonais**: a diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono, portanto os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são chamados de diagonais do quadrilátero $ABCD$;
- **Ângulos Internos**: os ângulos $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$;
- **Ângulos Externos**: $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$, que são os suplementos de $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ respectivamente.

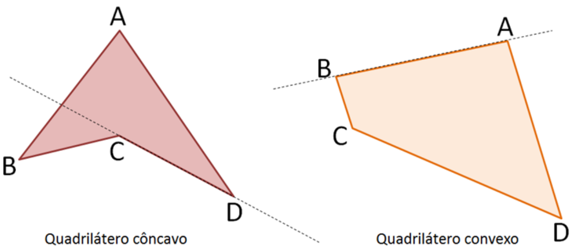
QUADRILÁTEROS CÔNCAVOS E CONVEXOS

Os quadriláteros são classificados em quadriláteros convexos ou côncavos. Um quadrilátero é convexo quando a região plana limitada por seus lados é convexa, caso contrário ele é côncavo.

Uma outra forma de definir quadriláteros convexos e côncavos é a seguinte:

Um polígono é ***convexo*** se a reta que contém qualquer de seus lados deixa todos os demais lados no mesmo semiplano.

De forma contrária, um polígono é ***côncavo*** se existe uma reta que contém um de seus lados e deixa parte dos demais lados num semiplano e parte no outro semiplano.

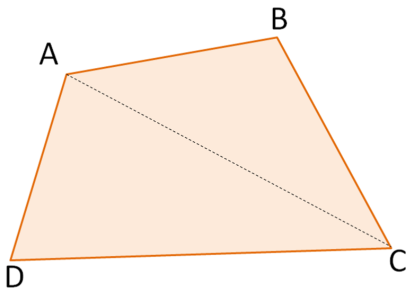


SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

"A soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo é igual a 360°".

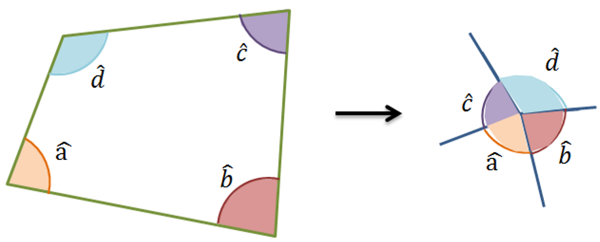
A seguir observe a demonstração:

Seja o quadrilátero $ABCD$:



Sempre podemos subdividir qualquer quadrilátero convexo em 2 triângulos (na figura acima os triângulos são ADC e ABC), então a soma dos ângulos internos será igual a:

$$S = 2 \cdot 180^o$$
$$S = 360^o$$



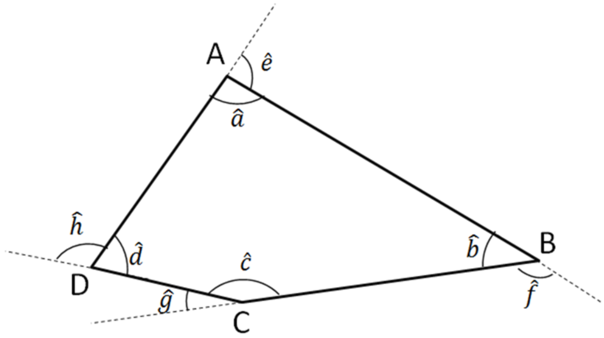
Observe que a junção dos ângulos internos $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d}$ resulta em um ângulo correspondente a uma volta completa.

SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS

"A soma dos ângulos externos de um quadrilátero convexo é igual a 360°".

A seguir observe a demonstração:

Seja o quadrilátero $ABCD$:



Sendo $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ e $\hat{d}$ os ângulos internos do quadrilátero e $\hat{e}$, $\hat{f}$, $\hat{g}$ e $\hat{h}$ os seus respectivos externos, temos:

$$\hat{a} + \hat{e} = 180^\circ$$
$$\hat{b} + \hat{f} = 180^\circ$$
$$\hat{c} + \hat{g} = 180^\circ$$
$$\hat{d} + \hat{h} = 180^\circ$$

Somando estas equações:

$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} + \hat{d} =$ Soma dos ângulos internos (S_i) do quadrilátero $ABCD$ (360°).

$\hat{e} + \hat{f} + \hat{g} + \hat{h} =$ Soma dos ângulos externos do quadrilátero $ABCD$ (S_e).

Então:

$$360^o + S_e = 720^o$$
$$S_e = 360^o$$

Note que:

Em todo quadrilátero convexo a soma dos ângulos internos é igual a soma dos ângulos externos.

De agora em diante, nos deteremos apenas aos quadriláteros convexos, termo que será suprimido e, portanto, quadrilátero passará a ser sinônimo de quadrilátero convexo para as nossas observações.

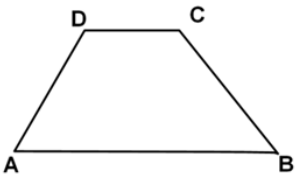
CLASSIFICAÇÃO DOS QUADRILÁTEROS

TRAPÉZIOS

Um quadrilátero convexo é um trapézio, somente se, possui apenas um par de lados opostos, paralelos.

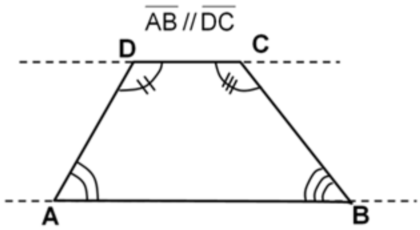
PROPRIEDADES DOS TRAPÉZIOS

Os lados paralelos AB e DC do trapézio são denominados ***bases*** e os outros dois lados não paralelos AD e BC são denominados de ***laterais***.



$\overline{AB}//\overline{DC}$

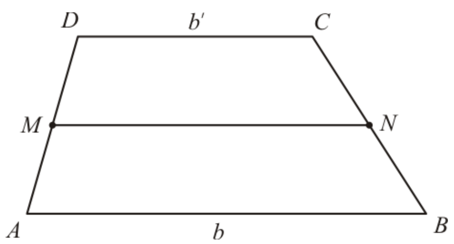
Em qualquer trapézio os ângulos de uma mesma lateral são suplementares.



Os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{D}A$ são colaterais internos, logo são suplementares (a soma de suas medidas é igual a 180º).

Os ângulos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são colaterais internos, logo são suplementares (a soma de suas medidas é igual a 180º).

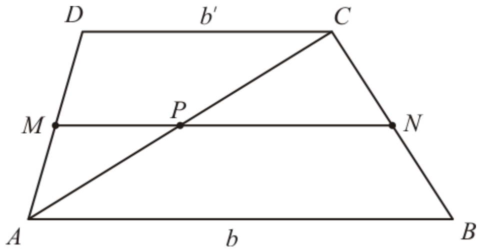
BASE MÉDIA DE UM TRAPÉZIO



Seja o trapézio $ABCD$, cujos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são suas bases paralelas. Sejam M e N os pontos médios dos lados do trapézio. O segmento $\overline{MN}$ é a **base média** do trapézio e é expresso por:

$$\overline{MN} = b_M = \frac{b+b'}{2} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$$

Para demonstrar esta propriedade, vamos partir do pressuposto que os pontos M e N são os pontos médios dos lados do trapézio.



Traçando a diagonal $\overline{AC}$, cortando o segmento $\overline{MN}$ em P, obtemos os triângulos ABC e ACD. Do triângulo ABC, o segmento PN é paralelo à AB. Sendo N o ponto médio de $\overline{BC}$, P é o ponto médio de $\overline{AC}$. Logo $\overline{PN}$ é a base média do triângulo ABC e é dada por:

$$\overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{AB} \qquad (i)$$

Analogamente, no triângulo ACD, temos que MP é sua base média, dada por:

$$\overline{MP} = \frac{1}{2}\overline{CD} \qquad (ii)$$

Temos ainda que:

$$\overline{MN} = \overline{MP} + \overline{PN} \qquad (iii)$$

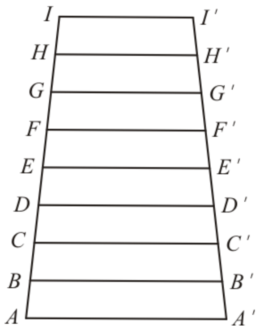
Substituindo *(i)* e *(ii)* em *(iii)*, obtemos:

$$\overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{CD} = \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}$$

Uma aplicação interessante é em escadas. Considere a escada da imagem abaixo com 9 degraus, sendo o primeiro degrau com $45cm$ de largura e o último degrau com $30cm$ de largura. Como calcular as larguras dos demais degraus?

Uma escada pode ser considerada como um trapézio. Se esta contiver um número ímpar de degraus, basta sabermos quanto mede o primeiro e o último para calcularmos a medida do degrau médio (informação extremamente útil para os matemáticos!), desde que as distâncias entre os degraus sejam constantes.

Vamos representar a escada com o diagrama simplificado abaixo:



Com os dados iniciais do problema, os segmentos $\overline{AA'} = 45cm$ e $\overline{II'} = 30cm$. Notem que o segmento $\overline{EE'}$ é a base média do trapézio $AA'I'I$.

Assim:

$$\overline{EE'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{II'}}{2} = \frac{45+30}{2} = 37,5cm$$

Agora, vamos aplicar a fórmula para determinar as medidas dos demais degraus.

$$\overline{CC'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{CC'}}{2} = \frac{45+37,5}{2} = 41,25cm$$

$$\overline{BB'} = \frac{\overline{AA'} + \overline{CC'}}{2} = \frac{45+41,25}{2} = 43,125cm$$

$$\overline{DD'} = \frac{\overline{CC'} + \overline{EE'}}{2} = \frac{41,25+37,5}{2} = 39,375cm$$

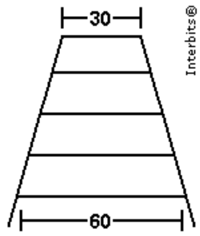
$$\overline{GG'} = \frac{\overline{EE'} + \overline{II'}}{2} = \frac{37,5+30}{2} = 33,75cm$$

$$\overline{FF'} = \frac{\overline{EE'} + \overline{GG'}}{2} = \frac{37,5+33,75}{2} = 35,625cm$$

$$\overline{HH'} = \frac{\overline{GG'} + \overline{II'}}{2} = \frac{33,75+30}{2} = 31,875cm$$

QUESTÃO 01 – ENEM 2000

Um marceneiro deseja construir uma escada trapezoidal com 5 degraus, de forma que o mais baixo e o mais alto tenham larguras respectivamente iguais a 60 cm e a 30 cm, conforme a figura:

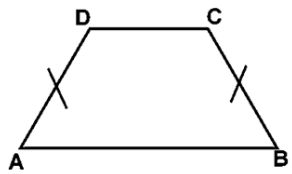


Os degraus serão obtidos cortando-se uma peça linear de madeira cujo comprimento mínimo, em cm, deve ser:

a) 144.
b) 180.
c) 210.
d) 225.
e) 240.

TRAPÉZIO ISÓSCELES

Um trapézio é dito isósceles se suas laterais são congruentes.



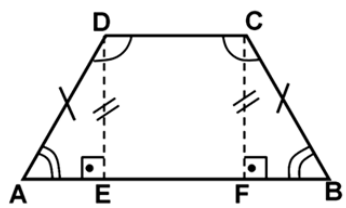
$$\overline{AB} // \overline{DC}$$
$$med(\overline{AD}) = med(\overline{BC})$$

PROPRIEDADES

*Em todo **trapézio isósceles** os ângulos apoiados em uma mesma base, são congruentes.*

DEMONSTRAÇÃO

Seja o trapézio isósceles $ABCD$.



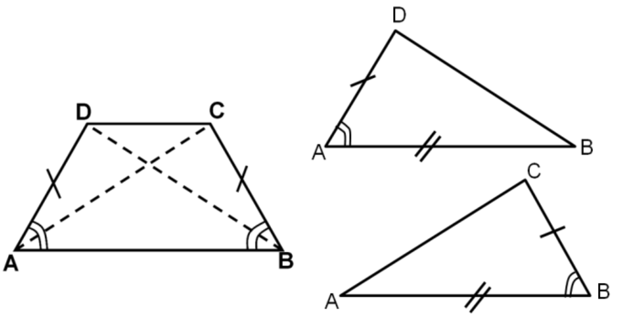
$$\hat{A} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{D} \equiv \hat{C}$$

Traçando a altura DE e CF definimos dois triângulos retângulos DEA e CFB.

Pelo caso especial de congruência entre triângulos retângulos, estes triângulos são congruentes, pois as respectivas hipotenusas têm a mesma medida e os catetos DE correspondente ao cateto CF possuem a mesma medida.

Portanto, os ângulos $D\hat{A}E$ e $C\hat{B}F$ são congruentes e consequentemente os respectivos ângulos $A\hat{D}C$ e $B\hat{C}D$ também são congruentes entre si.

As diagonais dos ***trapézios isósceles*** *são congruentes.*

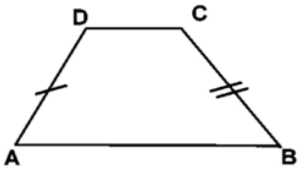


DEMONSTRAÇÃO

Pelo caso LAL, os triângulos ADB e ACB são congruentes. Esses triângulos têm o lado AB comum, os lados $\boldsymbol{DA}$ e $\boldsymbol{BC}$, com a mesma medida e os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ congruentes. Dessa forma, as diagonais AC e BD são congruentes.

TRAPÉZIO ESCALENO

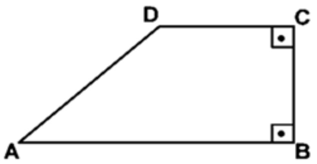
São todos os trapézios que têm as laterais com medidas diferentes.



$$\overline{AB}//\overline{DC}$$
$$med(\overline{AD}) \neq med(\overline{BC})$$

TRAPÉZIO RETÂNGULO

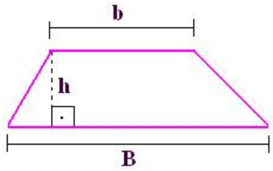
São todos os ***trapézios escalenos*** que têm uma de suas laterais perpendicular às bases do trapézio.



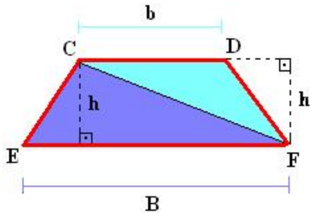
$$\overline{AB}//\overline{DC}$$
$$\overline{CB} \perp \overline{AB}$$

ÁREA DE UM TRAPÉZIO

Observe o desenho de um trapézio e os elementos utilizados no cálculo da sua área:



Para fazermos o cálculo da área do trapézio é preciso dividi-lo em dois triângulos, veja como:



A área desse trapézio pode ser calculada somando as áreas dos dois triângulos (ΔCFD e ΔCEF).

Antes de fazer o cálculo da área de cada triângulo separadamente observamos que eles possuem bases diferentes e alturas iguais.

Cálculo da área do ΔCEF:

$$A_{\Delta_1} = \frac{B \cdot h}{2}$$

Cálculo da área do ΔCFD:

$$A_{\Delta_2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Somando as duas áreas encontradas, teremos o cálculo da área de um trapézio qualquer:

$$A_T = A_{\Delta_1} + A_{\Delta_2}$$

$$A_T = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2}$$

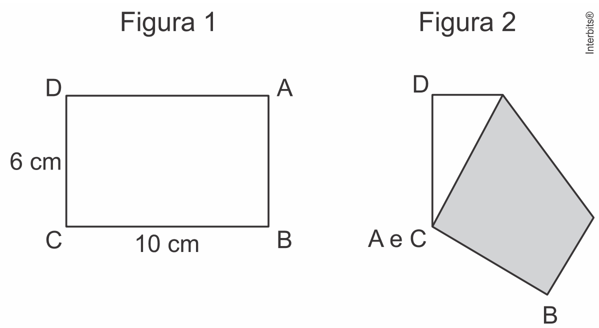
$$A_T = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Portanto, no cálculo da área de um trapézio qualquer utilizamos a seguinte fórmula:

$$A_T = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

QUESTÃO 02 – PUCCAMP 2017

Os lados de uma folha retangular ABCD de papel medem 10 cm e 6 cm, como indica a Figura 1. Essa folha, que é branca de um dos lados e cinza do outro, será dobrada perfeitamente de tal forma que o vértice A irá coincidir com o vértice C, como mostra a Figura 2.

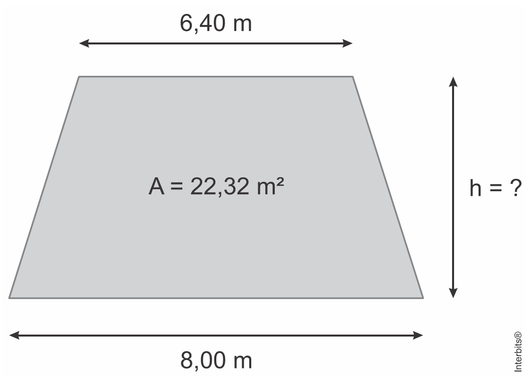


A área do trapézio cinza indicado na Figura 2, em cm^2, é igual a

a) 23.
b) 30.
c) 25.
d) 40.
e) 45.

QUESTÃO 03 – IFSP 2017

Observe a figura abaixo.



Ela representa um painel de propaganda que tem a forma de um trapézio. Sua área é de $22,32\text{ m}^2$ e as medidas das bases são $8,00\text{ m}$ e $6,40\text{ m}$. Assinale a alternativa que apresenta a altura (h) desse painel.

a) 2,80 m.
b) 2,90 m.
c) 3,00 m.
d) 3,10 m.
e) 3,20 m.

QUESTÃO 04 – IFAL 2017

Um pai possui um terreno no formato de um hexágono regular com lado 12 m. Ele pretende construir um muro dividindo o terreno em dois trapézios de mesma área, um com frente para uma rua e outro para a outra, que serão dados para seus dois filhos.

Qual o comprimento do muro?

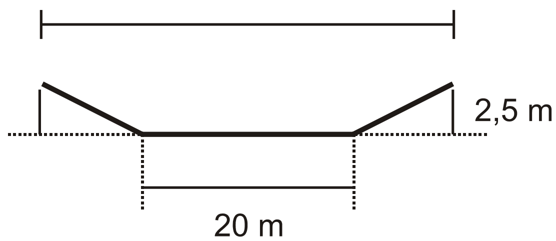
a) 12 m.
b) 18 m.
c) 24 m.
d) 30 m.
e) 36 m.

QUESTÃO 05 – ENEM 2009

A vazão do rio Tietê, em São Paulo, constitui preocupação constante nos períodos chuvosos.

Em alguns trechos, são construídas canaletas para controlar o fluxo de água.

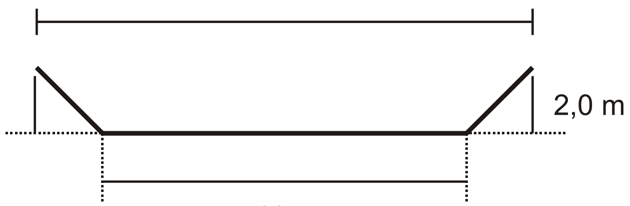
Uma dessas canaletas, cujo corte vertical determina a forma de um trapézio isósceles, tem as medidas especificadas na figura abaixo.



Neste caso, a vazão da água é de 1.050 m^3/s.

O cálculo da vazão, Q em m^3/s, envolve o produto da área A do setor transversal (por onde passa a água), em m^2, pela velocidade da água no local, v, em m/s, ou seja, Q = Av.

Planeja-se uma reforma na canaleta, com as dimensões especificadas na figura abaixo, para evitar a ocorrência de enchentes.



Disponível em: www2.uel.br.

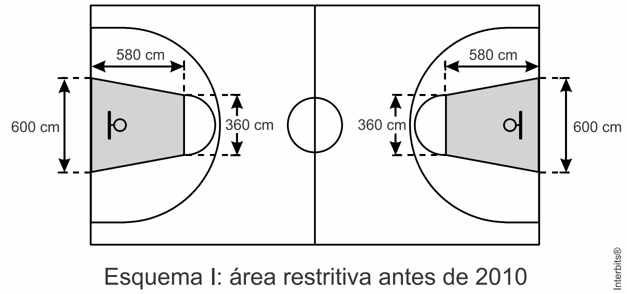
Na suposição de que a velocidade da água não se alterará, qual a vazão esperada para depois da reforma na canaleta?

a) 90 m^3/s.
b) 750 m^3/s.
c) 1.050 m^3/s.
d) 1.512 m^3/s.
e) 2.009 m^3/s.

QUESTÃO 06 – ENEM 2015

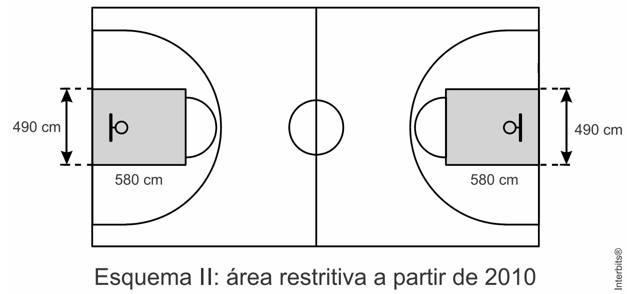
O Esquema I mostra a configuração de uma quadra de basquete.

Os trapézios em cinza, chamados de garrafões, correspondem a áreas restritivas.



Esquema I: área restritiva antes de 2010

Visando atender as orientações do Comitê Central da Federação Internacional de Basquete (Fiba) em 2010, que unificou as marcações das diversas ligas, foi prevista uma modificação nos garrafões das quadras, que passariam a ser retângulos, como mostra o Esquema II.



Esquema II: área restritiva a partir de 2010

Após executadas as modificações previstas, houve uma alteração na área ocupada por cada garrafão, que corresponde a um(a)

a) aumento de 5.800 cm^2.
b) aumento de 75.400 cm^2.
c) aumento de 214.600 cm^2.
d) diminuição de 63.800 cm^2.
e) diminuição de 272.600 cm^2.

QUESTÃO 07 – ENEM 2012

Jorge quer instalar aquecedores no seu salão de beleza para melhorar o conforto dos seus clientes no inverno.

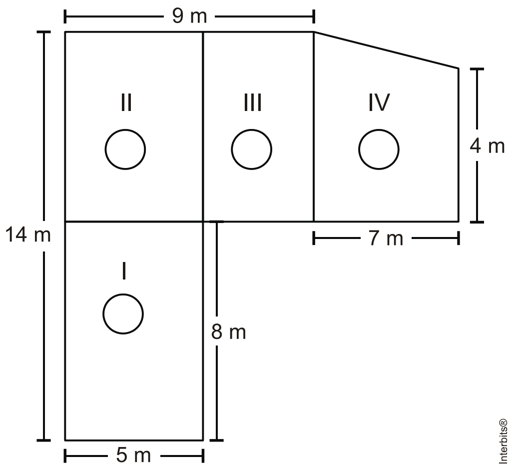
Ele estuda a compra de unidades de dois tipos de aquecedores:

- Modelo A, que consome 600 g/h (gramas por hora) de gás propano e cobre 35 m^2 de área;
- Modelo B, que consome 750 g/h de gás propano e cobre 45 m^2 de área.

O fabricante indica que o aquecedor deve ser instalado em um ambiente com área **menor** do que a da sua cobertura.

Jorge vai instalar uma unidade por ambiente e quer gastar o mínimo possível com gás.

A área do salão que deve ser climatizada encontra-se na planta seguinte (ambientes representados por três retângulos é um trapézio).



Avaliando-se todas as informações, serão necessários

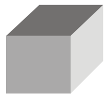
a) quatro unidades do tipo A e nenhuma unidade do tipo B.
b) três unidades do tipo A e uma unidade do tipo B.
c) duas unidades do tipo A e duas unidades do tipo B.
d) uma unidade do tipo A e três unidades do tipo B.
e) nenhuma unidade do tipo A e quatro unidades do tipo B.

QUESTÃO 08 – ENEM 2010 – 2ª APLICAÇÃO

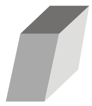
Para confeccionar, em madeira, um cesto de lixo que comporá o ambiente decorativo de uma sala de aula, um marceneiro utilizará, para as faces laterais, retângulos e trapézios isósceles e, para o fundo, um quadrilátero, com os lados de mesma medida e ângulos retos.

Qual das figuras representa o formato de um cesto que possui as características estabelecidas?

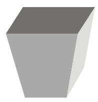
a)



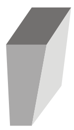
b)



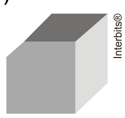
c)



d)



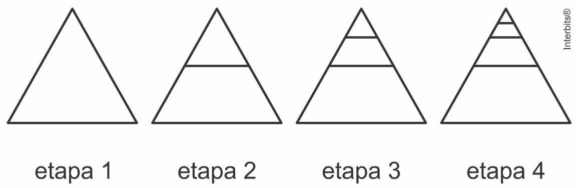
e)



ANDERSON
MATEMÁTICA

QUESTÃO 09 – UFRGS 2012

Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Na etapa 1, há um único triângulo equilátero. Na etapa 2, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo da etapa 1, formando dois triângulos equiláteros. Na etapa 3, é traçado um segmento a partir dos pontos médios de dois lados do triângulo menor da etapa 2, formando três triângulos equiláteros. Na etapa 4 e nas etapas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos triângulos menores da etapa anterior.

O número de trapézios na 6ª etapa de construção é

a) 14.
b) 15.
c) 16.
d) 17.
e) 18.

QUESTÃO 10 – UECE 2014

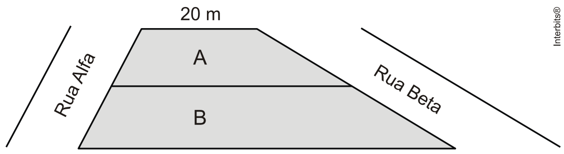
O palco de um teatro tem a forma de um trapézio isósceles cujas medidas de suas linhas de frente e de fundo são respectivamente 15 m e 9 m.

Se a medida de cada uma de suas diagonais é 15 m, então a medida da área do palco, em m², é

a) 80.
b) 90.
c) 108.
d) 1182.

QUESTÃO 11 – UERJ 2013

Dois terrenos, A e B, ambos com a forma de trapézio, têm as frentes de mesmo comprimento voltadas para a Rua Alfa. Os fundos dos dois terrenos estão voltados para a Rua Beta. Observe o esquema:



As áreas de A e B são, respectivamente, proporcionais a 1 e 2, e a lateral menor do terreno A mede 20 m.

Qual o comprimento x, em metros, da lateral maior do terreno B?

a) 80
b) 90
c) 100
d) 110
e) 120

QUESTÃO 12 – UCS 2012

O piso de uma sala de $210\ m^2$, em um Centro de Eventos, tem a forma de um trapézio, em que as bases medem $15\ m$ e $20\ m$. Ao dividir-se a sala por meio do levantamento de uma parede, passando pelos pontos médios dos lados não paralelos do piso, obtêm-se duas novas salas.

A área da sala, em m^2, que conterá o lado maior do piso da sala inicial será igual a

a) 105,0.
b) 107,5.
c) 112,5.
d) 92,5.
e) 101,5.

QUESTÃO 13 – UFF 2010

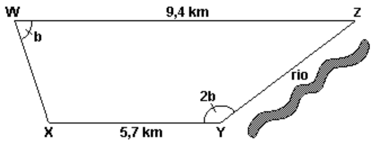
A palavra "perímetro" vem da combinação de dois elementos gregos: o primeiro, *perí*, significa "em torno de", e o segundo, *metron*, significa "medida".

O perímetro do trapézio cujos vértices têm coordenadas (−1, 0), (9, 0), (8, 5) e (1, 5)

a) $10 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
b) $16 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$
c) $22 + \sqrt{26}$
d) $17 + 2\sqrt{26}$
e) $17 + \sqrt{29} + \sqrt{26}$

QUESTÃO 14 – UNESP 2008

Uma certa propriedade rural tem o formato de um trapézio como na figura. As bases WZ e XY do trapézio medem 9,4 km e 5,7 km, respectivamente, e o lado YZ margeia um rio.



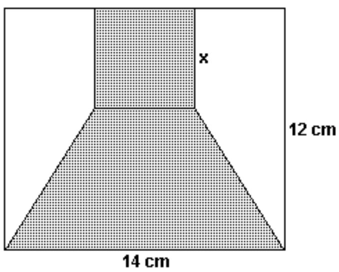
(figura fora de escala)

Se o ângulo X YZ é o dobro do ângulo X WZ, a medida, em km, do lado YZ que fica à margem do rio é:

a) 7,5.
b) 5,7.
c) 4,7.
d) 4,3.
e) 3,7.

QUESTÃO 15 – UNIFESP 2007

De um cartão retangular de base 14 cm e altura 12 cm, deseja-se recortar um quadrado de lado x e um trapézio isósceles, conforme a figura, onde a parte hachurada será retirada.

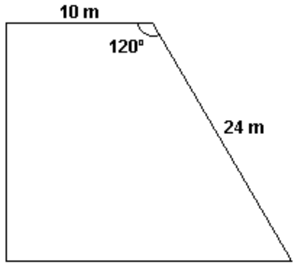


O valor de x em centímetros, para que a área total removida seja mínima, é

a) 3.
b) 2.
c) 1,5.
d) 1.
e) 0,5.

QUESTÃO 16 – UFPR 2006

Uma pessoa pretende adquirir um terreno de esquina para construir sua casa, porém ela não sabe a área do terreno. As únicas informações disponíveis são que o terreno possui o formato de um trapézio retângulo com um dos lados medindo 10 m e outro medindo 24 m. Além disso, o ângulo entre esses lados é de 120 graus, conforme a figura abaixo.

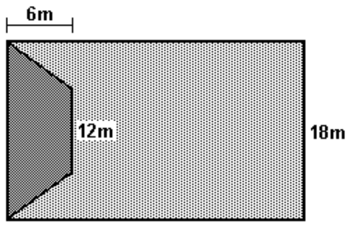


Qual é a área desse terreno? Considere $\sqrt{3} = 1,73$.

a) 314,32 m²
b) 346,54 m²
c) 360,58 m²
d) 308,70 m²
e) 332,16 m²

QUESTÃO 17 – UNIFESP 2003

Um comício deverá ocorrer num ginásio de esportes, cuja área é delimitada por um retângulo, mostrado na figura.



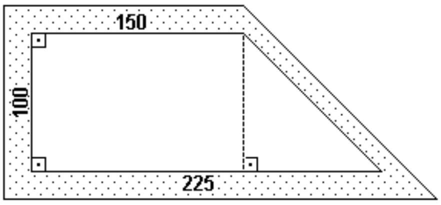
Por segurança, a coordenação do evento limitou a concentração, no local, a 5 pessoas para cada 2 m² de área disponível.

Excluindo-se a área ocupada pelo palanque, com a forma de um trapézio (veja as dimensões da parte hachurada na figura), quantas pessoas, no máximo, poderão participar do evento?

a) 2 700.
b) 1 620.
c) 1 350.
d) 1 125.
e) 1 050.

QUESTÃO 18 – PUCMG 2001

A pista representada na figura tem a forma de um trapézio retângulo e as dimensões indicadas em metros. Um atleta que queira percorrer 6km deverá dar m voltas completas nessa pista.



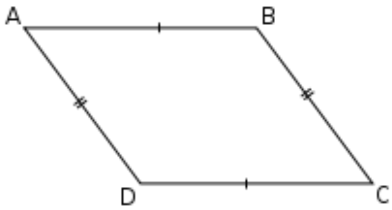
O valor de m é:

a) 9
b) 10
c) 11
d) 12
e) 13

PARALELOGRAMO

Um **paralelogramo** é um polígono de quatro lados (quadrilátero) cujos lados opostos são paralelos.

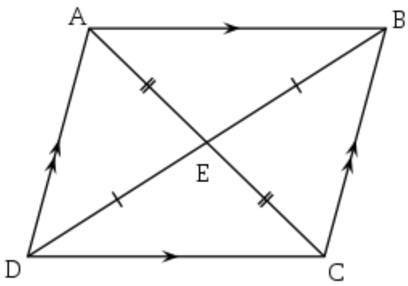
Por consequência, tem ângulos opostos e lados opostos congruentes.



DEFINIÇÃO

Um paralelogramo é um quadrilátero plano convexo cujos lados opostos são paralelos.

ELEMENTOS



Um paralelogramo ABCD tem:

- **Vértices**: os pontos A, B, C e D;
- **Lados:** os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$;
- **Diagonais**: a diagonal de um polígono é um segmento cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono, portanto os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são chamados de diagonais do paralelogramo $ABCD$;
- **Ângulos Internos**: os ângulos $B\hat{A}D, A\hat{B}C, B\hat{C}D \; e \; C\hat{D}A$.
- **Ângulos Externos**: são os suplementos de $B\hat{A}D, A\hat{B}C, B\hat{C}D \; e \; C\hat{D}A$ respectivamente.

PROPRIEDADES

Um paralelogramo possui:

- lados opostos congruentes;
- ângulos opostos congruentes;
- suas diagonais interceptam-se nos seus respectivos pontos médios;
- ângulos consecutivos suplementares;
- a soma dos ângulos internos igual a 360º;
- a soma dos ângulos externos igual a 360º;
- qualquer diagonal de um paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes.

ÁREA

A área de um paralelogramo é dada por:

$$A = b \cdot h$$

Onde, b é o comprimento de qualquer um de seus lados e h é a altura relativa a este lado.

Equivalentemente, temos:

$$A = a \cdot b \cdot sen\ \alpha$$

Onde, a e b são os comprimentos de dois lados adjacentes e α é o ângulo definido por estes lados.

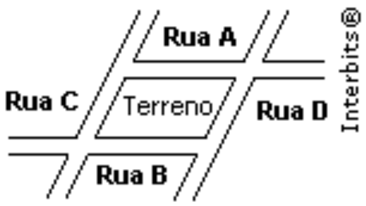
Ou, ainda, a área pode ser calculada por:

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2 \cdot sen\ \alpha}{2}$$

Onde, d_1 e d_2 são os comprimentos das diagonais do paralelogramo e α é um dos ângulos definido pela interseção das diagonais.

QUESTÃO 19 – ENEM 2002

Um terreno com o formato mostrado na figura foi herdado por quatro irmãos e deverá ser dividido em quatro lotes de mesma área.

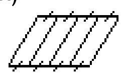


As ruas A e B são paralelas.
As ruas C e D são paralelas.

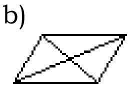
Um dos irmãos fez algumas propostas de divisão para que fossem analisadas pelos demais herdeiros.

Dos esquemas a seguir, onde lados de mesma medida têm símbolos iguais, o único em que os quatro lotes não possuem, necessariamente, a mesma área é:

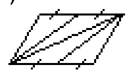
a)



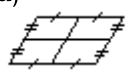
b)



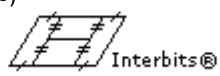
c)



d)

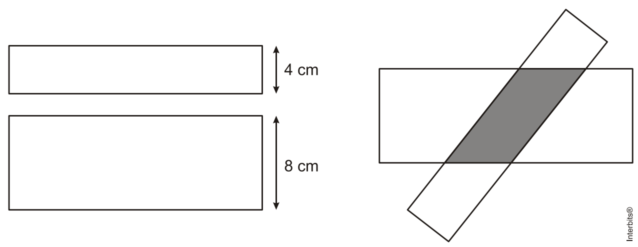


e)



QUESTÃO 20 – UPE 2013

Dois retângulos foram superpostos, e a intersecção formou um paralelogramo, como mostra a figura abaixo:

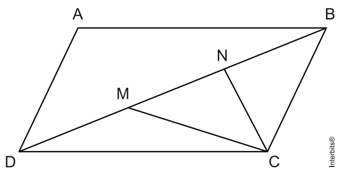


Sabendo-se que um dos lados do paralelogramo mede 4,5 cm, quanto mede a área desse paralelogramo?

a) 12 cm²
b) 16 cm²
c) 24 cm²
d) 32 cm²
e) 36 cm²

QUESTÃO 21 – IFPE 2012

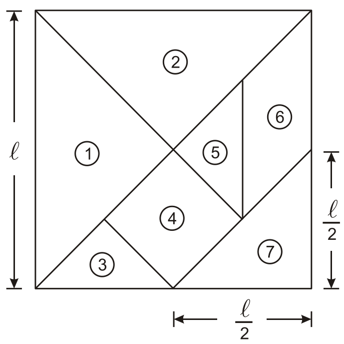
O Sr. Joaquim comprou um terreno em um loteamento numa praia do litoral sul de Pernambuco. O terreno tem a forma de um paralelogramo (figura abaixo) com a base medindo 20 metros e a altura medindo 15 metros. Os pontos M e N dividem a diagonal BD em três partes iguais. No triângulo CMN, ele vai cultivar flores. Qual é a área que o Sr. Joaquim destinou para esse cultivo, em m²?



a) 37
b) 39
c) 45
d) 48
e) 50

QUESTÃO 22 – UFRGS 2010

O tangran é um jogo chinês formado por uma peça quadrada, uma peça em forma de paralelogramo e cinco peças triangulares, todas obtidas a partir de um quadrado de lado ℓ, como indica a figura a seguir.

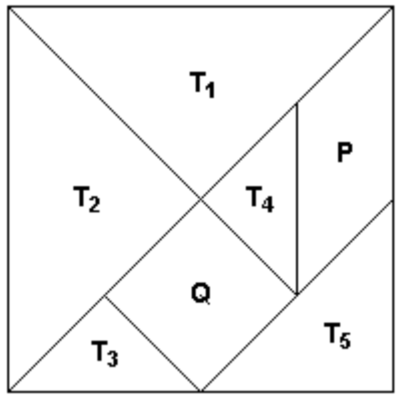


Três peças do tangran possuem a mesma área. Essa área é

a) $\frac{2}{16}$.
b) $\frac{2}{12}$.
c) $\frac{2}{8}$.
d) $\frac{2}{6}$.
e) $\frac{2}{4}$.

QUESTÃO 23 – UFSM 2006

Para facilitar o estudo dos triângulos, uma menina foi orientada por sua professora a trabalhar com jogos educativos. O TANGRAM é um quebra-cabeça de origem chinesa. É formado por cinco triângulos retângulos isósceles T_1, T_2, T_3, T_4 e T_5, um paralelogramo P e um quadrado Q que, juntos formam um quadrado, conforme a figura apresentada. Se a área de Q é 1, é correto afirmar:



a) A área do quadrado maior é 4.
b) A área de T_1 é o dobro da área de T_3.
c) A área de T_4 é igual à área de T_5.
d) A área de T_5 é $\frac{1}{4}$ da área do quadrado maior.
e) A área de P é igual à área de Q.

QUESTÃO 24 – PUCMG 2003

Em um mapa no qual 1 cm corresponde a 10 m, um terreno é representado por um paralelogramo cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{3}$ cm e 4 cm.

Sabendo-se que o menor dos ângulos desse paralelogramo mede 60° e que sen 60°= $\frac{\sqrt{3}}{2}$, pode-se afirmar que a medida real da área desse terreno, em metros quadrados, é:

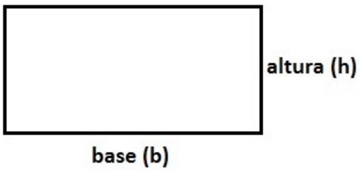
a) 200
b) 400
c) 600
d) 800

RETÂNGULO

DEFINIÇÃO

Um retângulo é um quadrilátero plano convexo, cujos ângulos são todos congruentes. Ou, equivalentemente, é um paralelogramo, cujos ângulos internos são ângulos retos. Por convenção, chama-se de base do retângulo o seu lado de maior comprimento e de altura do retângulo o comprimento de seu menor lado.

Consideremos um retângulo de base b e altura h.



A área pode ser calculada por:

$$A = b \cdot h$$

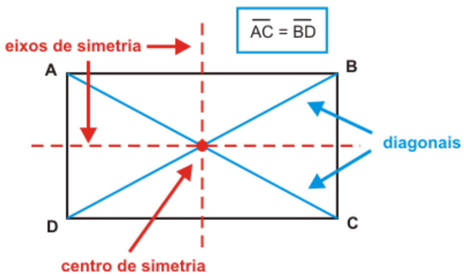
O perímetro pode ser calculado por:

$$2p = 2(b + h)$$

O comprimento da diagonal pode ser calculado por:

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

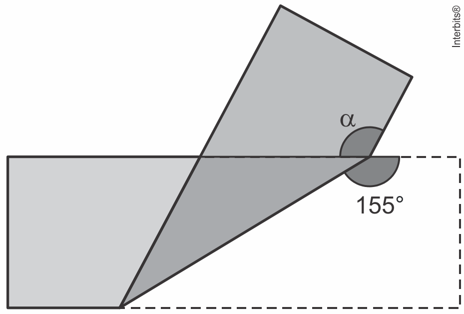
PROPRIEDADES



- As diagonais são iguais;
- O retângulo tem dois eixos de simetria;
- As diagonais cortam-se no ponto médio que é um centro de simetria.

QUESTÃO 25 – CFTRJ 2017

Uma fita de papel retangular é dobrada conforme a figura a seguir.



O valor do ângulo α marcado na figura é
a) 155°
b) 150°
c) 140°
d) 130°

QUESTÃO 26 – FGV 2017

Um canteiro com formato retangular tem área igual a 40 m^2 e sua diagonal mede $\sqrt{89}\text{ m}$.

O perímetro desse retângulo é:
a) 20 m
b) 22 m
c) 24 m
d) 26 m
e) 28 m

QUESTÃO 27 – UPE (SSA1) 2017

Em torno de um canteiro retangular de 12 m de comprimento por 8 m de largura, pretende-se construir uma calçada.

Qual deve ser a largura máxima dessa calçada, se o material disponível só é suficiente para cimentar uma área de 69 m^2?
a) 1,0 m
b) 1,5 m
c) 2,0 m
d) 2,5 m
e) 3,0 m

QUESTÃO 28 – IFPE 2017

Os alunos da turma de Gestão Ambiental do campus Recife construíram um projeto de telhado verde para a quadra de futebol de salão. Para aplicá-lo, vão cobrir todo o telhado com placas retangulares de grama com 50 cm de largura e 80 cm de comprimento.

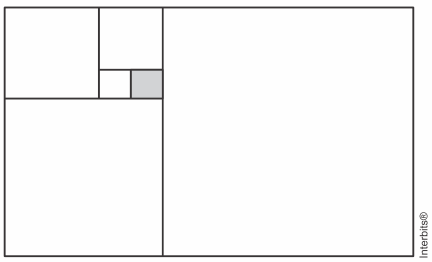
Se o telhado tem 800 m^2 de área, quantas placas serão necessárias?

a) 2.000
b) 1.600
c) 800
d) 4.000
e) 400

QUESTÃO 29 – CP2 2017

Uma sequência numérica muito famosa é a sequência de Fíbonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \quad)$. Essa sequência possui uma lei de formação simples: cada elemento, a partir do terceiro, é obtido somando-se os dois anteriores. Observe: $1+1=2$, $2+1=3$, $3+2=5$ e assim sucessivamente.

O retângulo exposto a seguir representa, geometricamente, a parte inicial dessa sequência. Ele está dividido em seis quadrados, cujas medidas dos lados são diretamente proporcionais aos termos iniciais dessa sequência.



Se a área do menor quadrado é igual a 4 cm^2, a razão entre a área do retângulo maior e a área do menor quadrado é

a) 40.
b) 64.
c) 104.
d) 240.

QUESTÃO 30 – IFAL 2017

Para colocar o piso em um salão de formato retangular, cujas dimensões são 6 metros de largura e 8 metros de comprimento, gasta-se R\$ 18,00 por cada metro quadrado.

Qual o valor total do gasto para colocar o piso em todo o salão?

a) R$ 486,00.
b) R$ 648,00.
c) R$ 684,00.
d) R$ 846,00.
e) R$ 864,00.

QUESTÃO 31 – ENEM PPL 2014

Um construtor precisa revestir o piso de uma sala retangular. Para essa tarefa, ele dispõe de dois tipos de cerâmicas:

I. cerâmica em forma de quadrado de lado 20 cm, que custa R$ 8,00 por unidade;

II. cerâmica em forma de triângulo retângulo isósceles de catetos com 20 cm, que custa R$ 6,00 por unidade.

A sala tem largura de 5 m e comprimento de 6 m.

O construtor deseja gastar a menor quantia possível com a compra de cerâmica. Sejam x o número de peças de cerâmica de forma quadrada e y o número de peças de cerâmica de forma triangular.

Isso significa, então, encontrar valores para x e y tais que $0{,}04x + 0{,}02y \geq 30$ e que tomem o menor possível valor de

a) $8x + 6y$.
b) $6x + 8y$.
c) $0{,}32x + 0{,}12y$.
d) $0{,}32x + 0{,}02y$.
e) $0{,}04x + 0{,}12y$.

QUESTÃO 32 – ENEM PPL 2013

Em uma casa, há um espaço retangular medindo 4 m por 6 m, onde se pretende colocar um piso de cerâmica resistente e de bom preço. Em uma loja especializada, há cinco possibilidades de pisos que atendem às especificações desejadas, apresentadas no quadro:

Tipo do piso	Forma	Preço do piso (em reais)
I	Quadrado de lado medindo 20 cm	15,00
II	Retângulo medindo 30 cm por 20 cm	20,00
III	Quadrado de lado medindo 25 cm	25,00
IV	Retângulo medindo 16 cm por 25 cm	20,00
V	Quadrado de lado medindo 40 cm	60,00

Levando-se em consideração que não há perda de material, dentre os pisos apresentados, aquele que implicará o menor custo para a colocação no referido espaço é o piso

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.
e) V.

QUESTÃO 33 – ENEM PPL 2012

Vitor deseja revestir uma sala retangular de dimensões $3\text{m} \times 4\text{m}$, usando um tipo de peça de cerâmica.

Em uma pesquisa inicial, ele selecionou cinco tipos de peças disponíveis, nos seguintes formatos e dimensões:

- Tipo I: quadrados, com 0,5 m de lado.

- Tipo II: triângulos equiláteros, com 0,5 m de lado.

- Tipo III: retângulos, com dimensões $0,5\text{m} \times 0,6\text{m}$.

- Tipo IV: triângulos retângulos isósceles, cujos catetos medem 0,5 m.

- Tipo V: quadrados, com 0,6 m de lado.

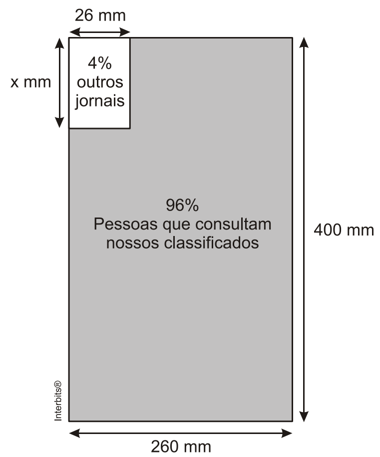
Analisando a pesquisa, o mestre de obras recomendou que Vítor escolhesse um tipo de piso que possibilitasse a utilização do menor número de peças e não acarretasse sobreposições ou cortes nas cerâmicas.

Qual o tipo de piso o mestre de obras recomendou que fosse comprado?

a) Tipo I.
b) Tipo II.
c) Tipo III.
d) Tipo IV.
e) Tipo V.

QUESTÃO 34 – ENEM 2010

O jornal de certa cidade publicou em uma página inteira a seguinte divulgação de seu caderno de classificados.



Para que a propaganda seja fidedigna a porcentagem da área que aparece na divulgação, a medida do lado do retângulo que representa os 4%, deve ser de aproximadamente

a) 1 mm.
b) 10 mm.
c) 17 mm.
d) 160 mm.
e) 167 mm.

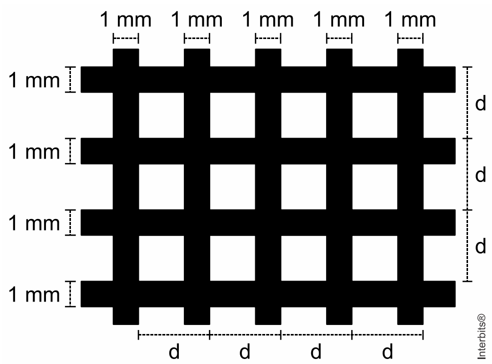
QUESTÃO 35 – ENEM 2015

Uma indústria produz malhas de proteção solar para serem aplicadas em vidros, de modo a diminuir a passagem de luz, a partir de fitas plásticas entrelaçadas perpendicularmente.

Nas direções vertical e horizontal, são aplicadas fitas de 1 milímetro de largura, tal que a distância entre elas é de $(d-1)$ milímetros, conforme a figura.

O material utilizado não permite a passagem da luz, ou seja, somente o raio de luz que atingir as lacunas deixadas pelo entrelaçamento consegue transpor essa proteção.

A taxa de cobertura do vidro é o percentual da área da região coberta pelas fitas da malha, que são colocadas paralelamente às bordas do vidro.



Essa indústria recebeu a encomenda de uma malha de proteção solar para ser aplicada em um vidro retangular de 5 m de largura por 9 m de comprimento.

A medida de d, em milímetros, para que a taxa de cobertura da malha seja de 75% é

a) 2
b) 1
c) $\frac{11}{3}$
d) $\frac{4}{3}$
e) $\frac{2}{3}$

QUESTÃO 36 – ENEM PPL 2015

O padrão internacional ISO 216 define os tamanhos de papel utilizados em quase todos os países. O formato-base é uma folha retangular de papel chamada de A0, cujas dimensões estão na razão $1:\sqrt{2}$. A partir de então, dobra-se a folha ao meio, sempre no lado maior, definindo os demais formatos, conforme o número da dobradura. Por exemplo, A1 é a folha A0 dobrada ao meio uma vez, A2 é a folha A0 dobrada ao meio duas vezes, e assim sucessivamente, conforme a figura.

Um tamanho de papel bastante comum em escritórios brasileiros é o A4, cujas dimensões são $21{,}0\text{ cm}$ por $29{,}7\text{ cm}$.

Quais são as dimensões, em centímetros, da folha A0?

a) $21{,}0 \times 118{,}8$
b) $84{,}0 \times 29{,}7$
c) $84{,}0 \times 118{,}8$
d) $168{,}0 \times 237{,}6$
e) $336{,}0 \times 475{,}2$

QUESTÃO 37 – ENEM 2014

Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes pedidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras.

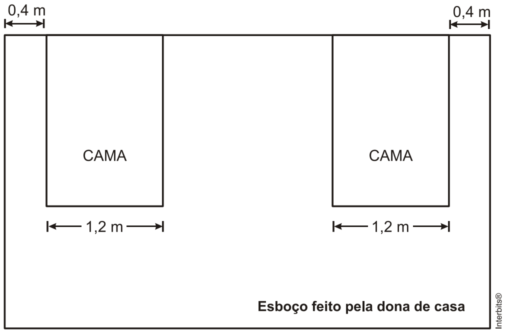
A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura.

A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{7}{8}$
c) $\frac{8}{7}$
d) $\frac{8}{9}$
e) $\frac{9}{8}$

QUESTÃO 38 – ENEM PPL 2013

Uma dona de casa pretende comprar uma escrivaninha para colocar entre as duas camas do quarto de seus filhos. Ela sabe que o quarto é retangular, de dimensões $4\text{ m} \times 5\text{ m}$, e que as cabeceiras das camas estão encostadas na parede de maior dimensão, onde ela pretende colocar a escrivaninha, garantindo uma distância de 0,4 m entre a escrivaninha e cada uma das camas, para circulação. Após fazer um esboço com algumas medidas, decidirá se comprará ou não a escrivaninha.



Após analisar o esboço e realizar alguns cálculos, a dona de casa decidiu que poderia comprar uma escrivaninha, de largura máxima igual a

a) 0,8 m.
b) 1,0 m.
c) 1,4 m.
d) 1,6 m.
e) 1,8 m.

QUESTÃO 39 – ENEM 2013

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade. Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada. Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

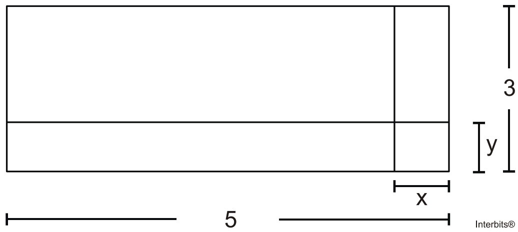
Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em

a) 4%.
b) 20%.
c) 36%.
d) 64%.
e) 96%.

QUESTÃO 40 – ENEM 2012

Um forro retangular de tecido traz em sua etiqueta a informação de que encolherá após a primeira lavagem, mantendo, entretanto, seu formato. A figura a seguir mostra as medidas originais do forro e o tamanho do encolhimento (x) no comprimento e (y) na largura. A expressão algébrica que representa a área do forro após ser lavado é (5 – x) (3 – y).



Nessas condições, a área perdida do forro, após a primeira lavagem, será expressa por:

a) 2xy
b) 15 – 3x
c) 15 – 5y
d) –5y – 3x
e) 5y + 3x – xy

QUESTÃO 41 – ENEM 2011

Em uma certa cidade, os moradores de um bairro carente de espaços de lazer reivindicam à prefeitura municipal a construção de uma praça. A prefeitura concorda com a solicitação e afirma que irá construí-la em formato retangular devido às características técnicas do terreno. Restrições de natureza orçamentária impõem que sejam gastos, no máximo, 180 m de tela para cercar a praça. A prefeitura apresenta aos moradores desse bairro as medidas dos terrenos disponíveis para a construção da praça:

Terreno 1: 55 m por 45 m
Terreno 2: 55 m por 55 m
Terreno 3: 60 m por 30 m
Terreno 4: 70 m por 20 m
Terreno 5: 95 m por 85 m

Para optar pelo terreno de maior área, que atenda às restrições impostas pela prefeitura, os moradores deverão escolher o terreno

a) 1.
b) 2.
c) 3.
d) 4.
e) 5.

QUESTÃO 42 – ENEM 2010

A loja Telas & Molduras cobra 20 reais por metro quadrado de tela, 15 reais por metro linear de moldura, mais uma taxa fixa de entrega de 10 reais.
Uma artista plástica precisa encomendar telas e molduras a essa loja, suficientes para 8 quadros retangulares (25 cm x 50 cm). Em seguida, fez uma segunda encomenda, mas agora para 8 quadros retangulares (50 cm x 100 cm).

O valor da segunda encomenda será
a) o dobro do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
b) maior do que o valor da primeira encomenda, mas não o dobro.
c) a metade do valor da primeira encomenda, porque a altura e a largura dos quadros dobraram.
d) menor do que o valor da primeira encomenda, mas não a metade.
e) igual ao valor da primeira encomenda, porque o custo de entrega será o mesmo.

QUESTÃO 43 – ENEM CANCELADO 2009

Uma fotografia tirada em uma câmera digital é formada por um grande número de pontos, denominados pixels. Comercialmente, a resolução de uma câmera digital é especificada indicando os milhões de pixels, ou seja, os megapixels de que são constituídas as suas fotos.

Ao se imprimir uma foto digital em papel fotográfico, esses pontos devem ser pequenos para que não sejam distinguíveis a olho nu.

A resolução de uma impressora é indicada pelo termo dpi (*dot per inch*), que é a quantidade de pontos que serão impressos em uma linha com uma polegada de comprimento.

Uma foto impressa com 300 dpi, que corresponde a cerca de 120 pontos por centímetro, terá boa qualidade visual, já que os pontos serão tão pequenos, que o olho não será capaz de vê-los separados e passará a ver um padrão contínuo.

Para se imprimir uma foto retangular de 15 cm por 20 cm, com resolução de pelo menos 300 dpi, qual é o valor aproximado de megapixels que a foto terá?
a) 1,00 megapixel.
b) 2,52 megapixels.
c) 2,70 megapixels.
d) 3,15 megapixels.
e) 4,32 megapixels.

QUESTÃO 44 – ENEM SIMULADO 2009

Uma pessoa de estatura mediana pretende fazer um alambrado em torno do campo de futebol de seu bairro. No dia da medida do terreno, esqueceu de levar a trena para realizar a medição. Para resolver o problema, a pessoa cortou uma vara de comprimento igual a sua altura. O formato do campo é retangular e foi constatado que ele mede 53 varas de comprimento e 30 varas de largura.

Uma região R tem área A_R, dada em m², de mesma medida do campo de futebol, descrito acima.
A expressão algébrica que determina a medida da vara em metros é

a) $\text{Vara} = \sqrt{\dfrac{A_R}{1500}}\,\text{m}.$

b) $\text{Vara} = \sqrt{\dfrac{A_R}{1590}}\,\text{m}.$

c) $\text{Vara} = \dfrac{1590}{A_R}\,\text{m}.$

d) $\text{Vara} = \dfrac{A_R}{1500}\,\text{m}.$

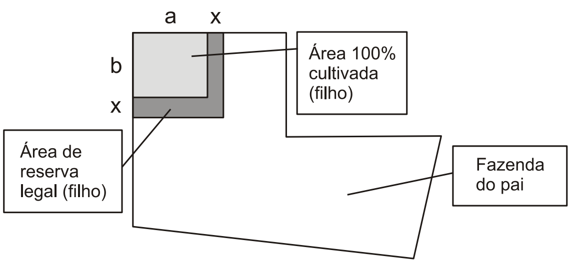
e) $\text{Vara} = \dfrac{A_R}{1590}\,\text{m}.$

QUESTÃO 45 – ENEM CANCELADO 2009

Um fazendeiro doa, como incentivo, uma área retangular de sua fazenda para seu filho, que está indicada na figura como 100% cultivada.

De acordo com as leis, deve-se ter uma reserva legal de 20% de sua área total.

Assim, o pai resolve doar mais uma parte para compor a reserva para o filho, conforme a figura.



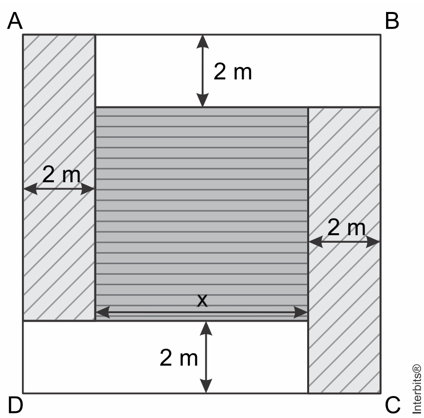
De acordo com a figura anterior, o novo terreno do filho cumpre a lei, após acrescentar uma faixa de largura x metros contornando o terreno cultivado, que se destinará à reserva legal (filho). O dobro da largura x da faixa é

a) $10\%(a + b)^2$
b) $10\%(a \cdot b)^2$
c) $\sqrt{a+b} - (a + b)$
d) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} - (a+b)$
e) $\sqrt{(a+b)^2 + ab} + (a+b)$

QUESTÃO 46 – UNESP 2016

Renata pretende decorar parte de uma parede quadrada $ABCD$ com dois tipos de papel de parede, um com linhas diagonais e outro com riscos horizontais.

O projeto prevê que a parede seja dividida em um quadrado central, de lado x, e quatro retângulos laterais, conforme mostra a figura.

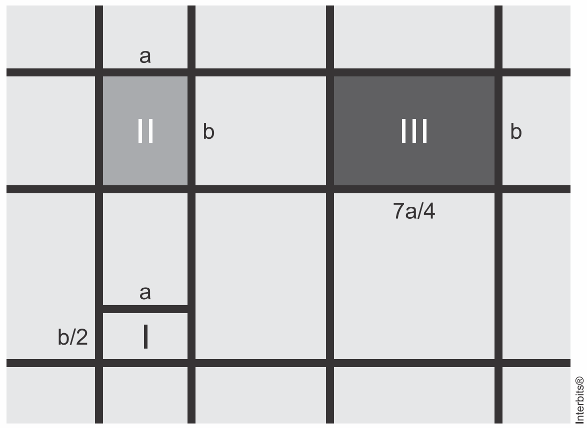


Se o total da área decorada com cada um dos dois tipos de papel é a mesma, então x, em metros, é igual a

a) $1 + 2\sqrt{3}$
b) $2 + 2\sqrt{3}$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $1 + \sqrt{3}$
e) $4 + \sqrt{3}$

QUESTÃO 47 – PUCCAMP 2016

A figura abaixo é a reprodução de uma obra de Mondrian.



Junto a alguns lados dos retângulos estão marcadas referências às medidas de seus lados.

A soma das áreas dos retângulos I e II corresponde, da área do retângulo III, aproximadamente, a

a) 78%.
b) 86%.
c) 81%.
d) 92%.
e) 74%.

QUESTÃO 48 – CP2 2016

A Figura 1 representa a visão de um jogador de futebol na cobrança de um pênalti:

Fonte: http://ultradownloads.com.br
Acessado em 19/11/2015.

Figura 1

Considere as medidas oficiais de uma baliza de futebol (Figura 2) como sendo $7,32\,\text{m}$ de comprimento e $2,44\,\text{m}$ de altura, sabendo que a área ocupada pelo goleiro é representada pelo retângulo $ABCD$ (Figura 3), com $1,80\,\text{m}$ de altura (lado AB) e $2,0\,\text{m}$ de envergadura/largura (lado BC).

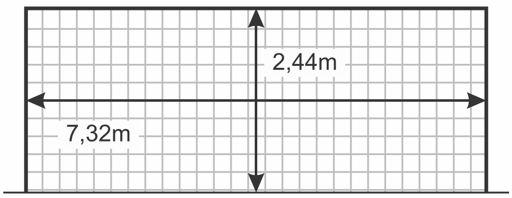


Figura 2

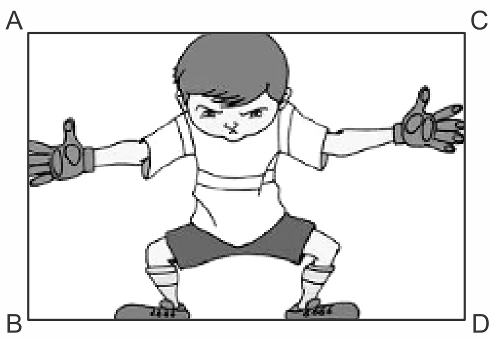


Figura 3

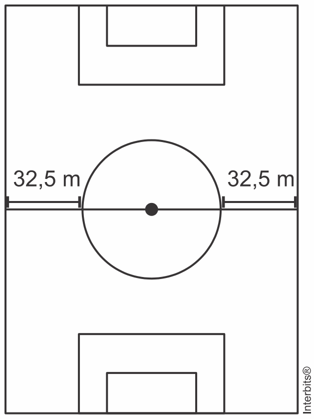
Fonte: http://www.inmetro.gov.br/consumidor/produtos/campo_de_futebol.asp
Acessado em: 19/11/2015.

Deste modo, na cobrança de um pênalti, o goleiro ocupa uma porcentagem da área do gol **aproximadamente** igual a

a) 12%.
b) 15%.
c) 20%.
d) 24%.

QUESTÃO 49 – IFSC 2015

Um campo de futebol tem o formato de um retângulo de comprimento $(2x+20)$ metros e largura $(x+45)$ metros, conforme a figura:



Sabendo que a área desse campo é de $8500\,\text{m}^2$, assinale a alternativa que indica CORRETAMENTE a medida do raio do círculo central:

a) $10\,\text{m}$
b) $15\,\text{m}$
c) $20\,\text{m}$
d) $25\,\text{m}$
e) $30\,\text{m}$

QUESTÃO 50 – CPS 2015

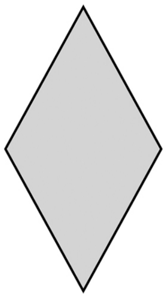
Um artista pretende pintar uma tela que tenha o formato de um retângulo áureo, por considerá-lo mais agradável esteticamente dentre todos os retângulos.

Ele sabe que um retângulo é áureo quando a razão entre os comprimentos de seus lados é $1,618$, aproximadamente.

Assim sendo, se a medida do maior lado da tela for de $40\,\text{cm}$, então, a medida do menor lado será, em centímetros, aproximadamente,

a) $22,94$.
b) $24,72$.
c) $28,54$.
d) $36,26$.
e) $64,72$.

LOSANGO

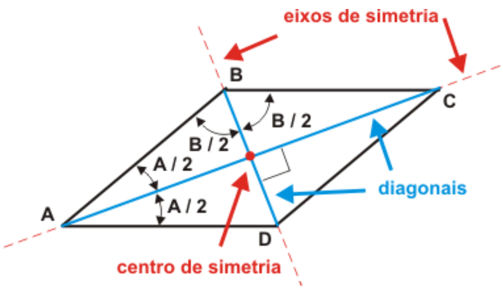


Losango ou rombo é um quadrilátero equilátero, ou seja, é um polígono formado por quatro lados de igual comprimento.

Um losango é também um paralelogramo.

Todo losango é um paralelogramo, e um losango com ângulos retos é um quadrado.

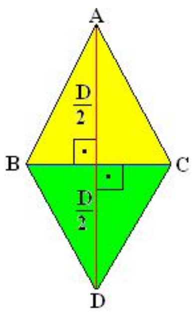
PROPRIEDADES



- As diagonais são ortogonais;
- As diagonais são bissetrizes dos ângulos internos;
- As diagonais são eixos de simetria;
- As diagonais cortam-se no ponto médio que é um centro de simetria.
- Ângulos opostos têm medidas iguais.
- Todo losango tem um círculo inscrito.

Podemos partir do seguinte raciocínio para compreender a fórmula utilizada para o cálculo da área do losango:

Um losango é formado por dois triângulos idênticos, com base igual a d (diagonal menor) e altura igual a $\frac{D}{2}$ (metade da diagonal maior).



Os triângulos ABC e ACD são iguais; portanto, as suas superfícies (áreas) também são iguais.

Veja o cálculo:

Cálculo da área do triângulo ABC e BCD.

A fórmula que utilizamos para o cálculo da área de um triângulo é $A = \frac{b \cdot h}{2}$, b de base e h de altura.

Substituindo os dados do losango na fórmula temos:

Base = d (diagonal menor)

Altura = $\frac{D}{2}$ (metade da diagonal maior)

Assim, a área dos triângulos será:

$$A = \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

Como a área de um losango é a soma das áreas dos triângulos ABC e ACD, concluímos que a área do losango será:

$$A_L = A_{ABC} + A_{BCD}$$

$$A = \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2} + \frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}$$

$$A = 2\left(\frac{d \cdot \frac{D}{2}}{2}\right)$$

$$A = d \cdot \frac{D}{2}$$

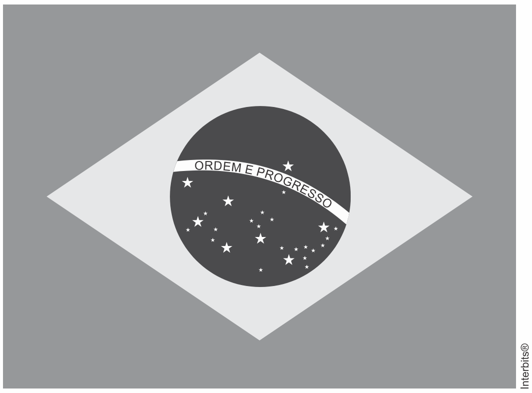
$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Portanto, a área do losango poderá ser calculada utilizando a seguinte fórmula:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

É importante ressaltar que o losango possui as mesmas características de um paralelogramo.

QUESTÃO 51 – IFSC 2014



Todos os anos, no mês de Setembro, comemora-se a Independência do Brasil. Durante uma semana, muitas Instituições exibem a Bandeira do Brasil como forma de homenagear a Pátria.

A maioria dos brasileiros desconhece que a fabricação da Bandeira Nacional obedece a rígidos critérios em relação às dimensões das figuras geométricas (retângulo, losango e círculo), das letras e das estrelas.

Considere que as diagonais maior e menor do losango amarelo da Bandeira do Brasil medem 16 dm e 12 dm, respectivamente.

Então é CORRETO afirmar que a linha que delimita a parte amarela mede:

a) 40 dm
b) 28 dm
c) 20 dm
d) 48 dm
e) 96 dm

QUESTÃO 52 – ENEM 2012

O losango representado na Figura 1 foi formado pela união dos centros das quatro circunferências tangentes, de raios de mesma medida.

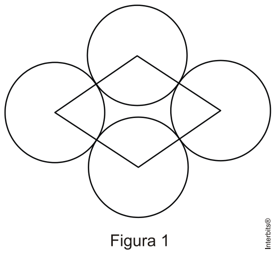


Figura 1

Dobrando-se o raio de duas das circunferências centradas em vértices opostos do losango e ainda mantendo-se a configuração das tangências, obtém-se uma situação conforme ilustrada pela Figura 2.

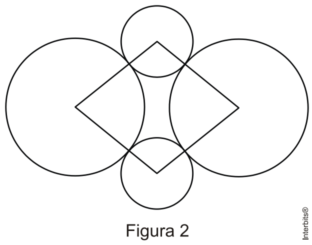


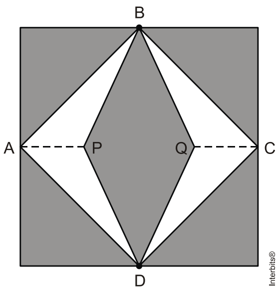
Figura 2

O perímetro do losango da Figura 2, quando comparado ao perímetro do losango da Figura 1, teve um aumento de

a) 300%.
b) 200%.
c) 150%.
d) 100%.
e) 50%.

QUESTÃO 53 – ENEM 2012

Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.



Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos AP e QC medem 1/4 da medida do lado do quadrado.

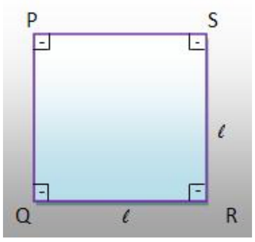
Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m², e outro para a parte mais clara (regiões ABPDA e BCDQB), que custa R$ 50,00 o m².

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

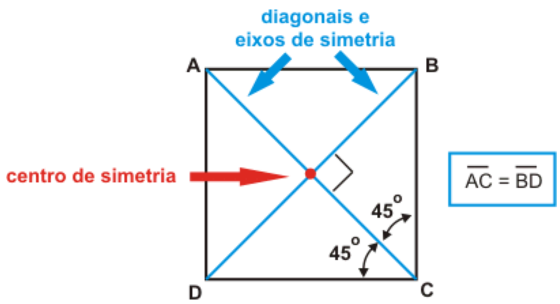
a) R$ 22,50
b) R$ 35,00
c) R$ 40,00
d) R$ 42,50
e) R$ 45,00

QUADRADO

O **quadrado** é um quadrilátero regular, ou seja, uma figura geométrica com quatro lados de mesmo comprimento e quatro ângulos retos. Equivalentemente, é um paralelogramo com os quatro ângulos internos iguais (retângulo) e quatro lados de mesma medida (losango).



PROPRIEDADES



- As diagonais são iguais;
- As diagonais são ortogonais;
- As diagonais são bissetrizes dos ângulos internos;
- As diagonais são eixos de simetria;
- As diagonais cortam-se no ponto médio que é um centro de simetria.

A sua área é calculada através da multiplicação da sua base l pela sua altura l, assim como no retângulo.

$$A = l^2$$

QUESTÃO 54 – IFPE 2017

CÂMARA FRIA PARA AÇOUGUE

Para ter uma boa qualidade de carne, mantendo sempre sua temperatura e sua estocagem na medida certa, os açougues usam de uma estrutura muito boa e simples, a câmara fria. Primeiramente, o material que compõe esse equipamento precisa ter uma alta qualidade, porque será submetido a baixas temperaturas a todo momento. O material principal da câmara fria para açougue é o aço galvanizado, que é utilizado para que não haja a corrosão da câmara.

Disponível em: <https://www.sites.google.com/site/portaldeindustrias/refrigeradores/camara-fria-para-acougue>. Acesso: 02 out. 2016.

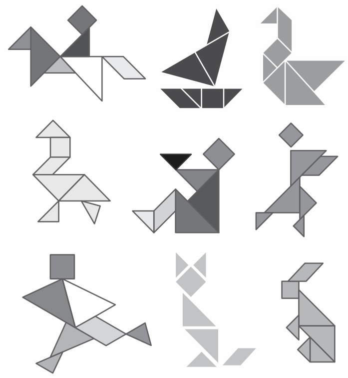
Sabendo que uma porta da câmara fria acima tem forma quadrada com 289 decímetros quadrados de área, determine o perímetro dessa porta.

a) 17 dm
b) 34 dm
c) 68 dm
d) 51 dm
e) 578 dm

QUESTÃO 55 – CPS 2017

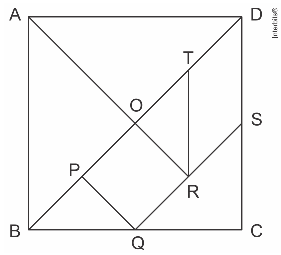
O Tangram é um quebra-cabeça chinês. Há uma lenda sobre esse quebra-cabeça que afirma que um jovem chinês, ao despedir-se de seu mestre, para uma longa viagem pelo mundo, recebeu uma tábua quadrada cortada em 7 peças (um quadrado, um paralelogramo e cinco triângulos). Assim o discípulo poderia reorganizá-las para registrar todas as belezas da viagem. Lendas e histórias como essa sempre cercam a origem de objetos ou fatos, a respeito da qual temos pouco ou nenhum conhecimento, como é o caso do Tangram. Se é ou não uma história verdadeira, pouco importa: o que vale é a magia, própria dos mitos e lendas.

<https://tinyurl.com/htszezr> Acesso em: 03.03.2017. Adaptado.



<https://tinyurl.com/gngjyue> Acesso em: 03.03.2017. Original colorido.

Observe o Tangram, em uma possível disposição de suas peças.



Na figura, tem-se que:

- $\overline{QS}$ é paralelo a $\overline{BD}$;
- os polígonos ABCD e OPQR são quadrados;
- S é ponto médio de $\overline{CD}$;
- P é ponto médio de $\overline{OB}$;
- O é ponto médio de $\overline{BD}$.

Se a área do triângulo ABO é $16\ cm^2$, a área do quadrado OPQR é, em centímetros quadrados,

a) 2.
b) 4.
c) 6.
d) 8.
e) 10.

QUESTÃO 56 – ENEM PPL 2015

O prefeito de uma cidade deseja promover uma festa popular no parque municipal para comemorar o aniversário de fundação do município.

Sabe-se que esse parque possui formato retangular, com 120 m de comprimento por 150 m de largura.

Além disso, para segurança das pessoas presentes no local, a polícia recomenda que a densidade média, num evento dessa natureza, não supere quatro pessoas por metro quadrado.

Seguindo as recomendações de segurança estabelecidas pela polícia, qual é o número máximo de pessoas que poderão estar presentes na festa?

a) 1.000
b) 4.500
c) 18.000
d) 72.000
e) 120.000

QUESTÃO 57 – ENEM 2014

A maior piscina do mundo, registrada no livro *Guiness*, está localizada no Chile, em San Alfonso del Mar, cobrindo um terreno de 8 hectares de área.

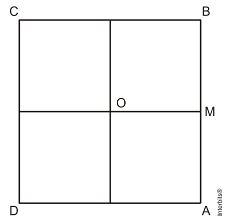
Sabe-se que 1 hectare corresponde a 1 hectômetro quadrado.

Qual é o valor, em metros quadrados, da área coberta pelo terreno da piscina?

a) 8
b) 80
c) 800
d) 8.000
e) 80.000

QUESTÃO 58 – ENEM PPL 2013

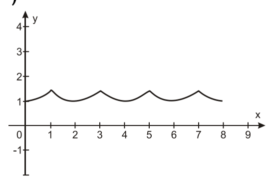
O quadrado *ABCD*, de centro *O* e lado 2 cm, corresponde à trajetória de uma partícula P que partiu de *M*, ponto médio de *AB*, seguindo pelos lados do quadrado e passando por *B*, *C*, *D*, *A* até retornar ao ponto *M*.



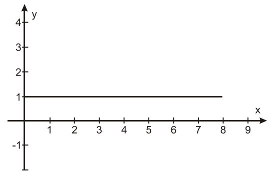
Seja *F(x)* a função que representa a distância da partícula P ao centro *O* do quadrado, a cada instante de sua trajetória, sendo *x* (em cm) o comprimento do percurso percorrido por tal partícula.

Qual o gráfico que representa *F(x)*?

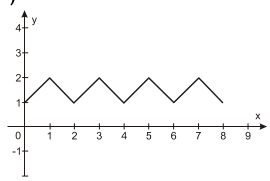
a)



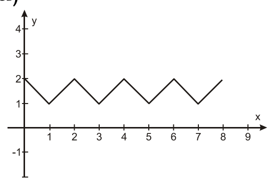
b)



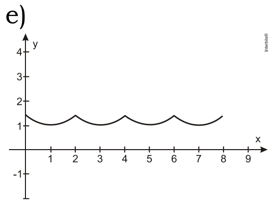
c)



d)



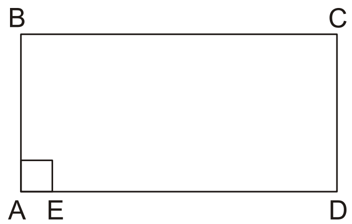
e)



QUESTÃO 59 – ENEM 2009

O governo cedeu terrenos para que famílias construíssem suas residências com a condição de que no mínimo 94% da área do terreno fosse mantida como área de preservação ambiental.

Ao receber o terreno retangular ABCD, em que AB = $\frac{BC}{2}$, Antônio demarcou uma área quadrada no vértice A, para a construção de sua residência, de acordo com o desenho, no qual AE = $\frac{AB}{5}$ é lado do quadrado.



Nesse caso, a área definida por Antônio atingiria exatamente o limite determinado pela condição se ele

a) duplicasse a medida do lado do quadrado.
b) triplicasse a medida do lado do quadrado.
c) triplicasse a área do quadrado.
d) ampliasse a medida do lado do quadrado em 4%.
e) ampliasse a área do quadrado em 4%.

QUESTÃO 60 – ENEM 2008

O *tangram* é um jogo oriental antigo, uma espécie de quebra-cabeça, constituído de sete peças: 5 triângulos retângulos e isósceles, 1 paralelogramo e 1 quadrado.

Essas peças são obtidas recortando-se um quadrado de acordo com o esquema da figura 1.

Figura 1

Utilizando-se todas as sete peças, é possível representar uma grande diversidade de formas, como as exemplificadas nas figuras 2 e 3.

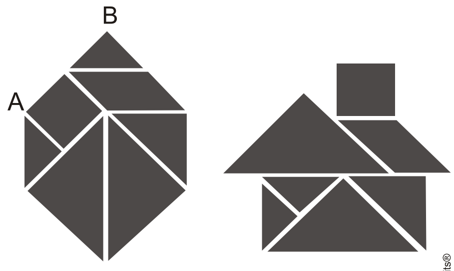


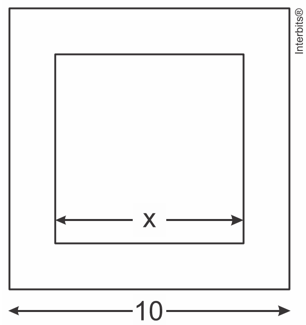
Figura 2 Figura 3

Se o lado AB do hexágono mostrado na figura 2 mede $2\,cm$, então a área da figura 3, que representa uma "casinha", é igual a

a) $4\,cm^2$.
b) $8\,cm^2$.
c) $12\,cm^2$.
d) $14\,cm^2$.
e) $16\,cm^2$.

QUESTÃO 61 – UFRGS 2016

Dardos são lançados em direção a um alvo com a forma de um quadrado de lado 10, como representado na figura abaixo, tendo igual probabilidade de atingir qualquer região do alvo.



Se todos os dardos atingem o alvo e 50% atingem o quadrado de lado x, o valor inteiro mais próximo de x é

a) 4.
b) 5.
c) 6.
d) 7.
e) 8.

QUESTÃO 62 – UEMA 2016

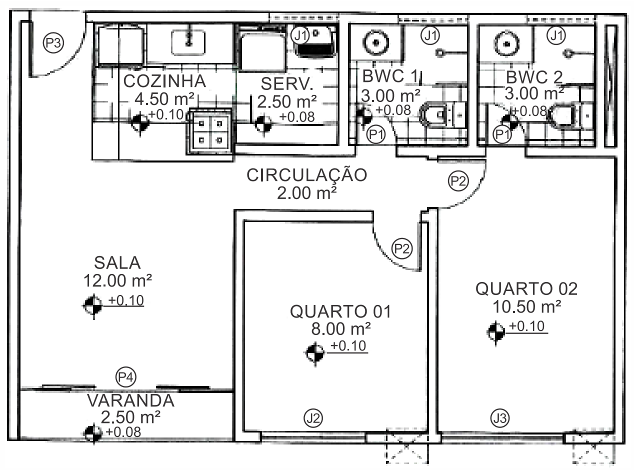
Para responder à questão, leia o texto e analise a planta baixa do apartamento descrito abaixo.

Um casal que acabou de receber seu apartamento planeja fazer pequenas modificações no piso. Após analisar a planta baixa, decidiu usar, apenas, dois tipos de azulejo.

No primeiro orçamento, sala, varanda, quartos e circulação foram cotados com o azulejo tipo 01; cozinha, área de serviço e banheiros, com o azulejo tipo 02.

No segundo orçamento, o azulejo tipo 01 seria usado para sala, circulação, cozinha e área de serviço; o azulejo tipo 02 aplicado somente aos banheiros.

Os dois orçamentos tiveram valores totais de R$ 1.354,00 e R$ 780,00, respectivamente.



www.habitissimo.com.br/orcamento. Adaptado.

Analisando os dados, os valores do metro quadrado, em reais, dos dois tipos de azulejo incluídos nos dois orçamentos são, respectivamente, de

a) R$ 21,00 e R$ 27,00.

b) R$ 25,84 e R$ 39,53.

c) R$ 30,00 e R$ 25,00.

d) R$ 32,00 e R$ 18,00.

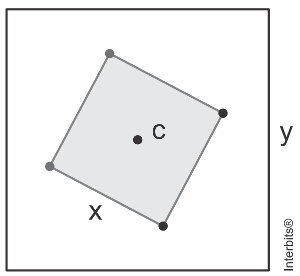
e) R$ 36,17 e R$ 6,75.

QUESTÃO 63 – CP2 2015

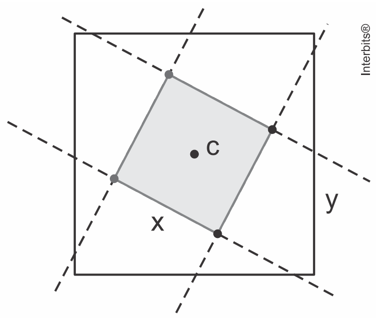
Em uma aula de Artes Visuais, a professora pediu aos seus alunos que construíssem um quadrado a partir do recorte de dois quadrados de lados medindo x e y.

Mirian, uma das alunas mais criativas, decidiu confeccionar a sua peça quadrada de acordo com os passos seguintes:

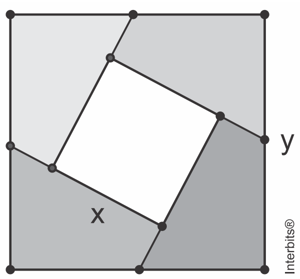
Passo 1 – marcou o centro dos dois quadrados, colocou um sobre o outro, fazendo com que os centros coincidissem no ponto C.



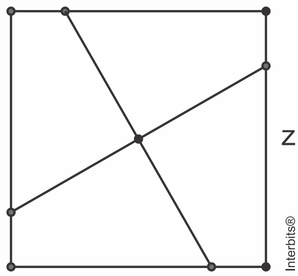
Passo 2 – traçou retas pontilhadas sobre os lados do quadrado menor.



Passo 3 – recortou quatro quadriláteros congruentes a partir da área visível do quadrado maior.



Passo 4 – posicionou os quatro quadriláteros de tal maneira que formassem um novo quadrado de lado de medida z.



Uma relação válida entre as medidas x, y e z dos lados dos quadrados é

a) $z = y - x.$

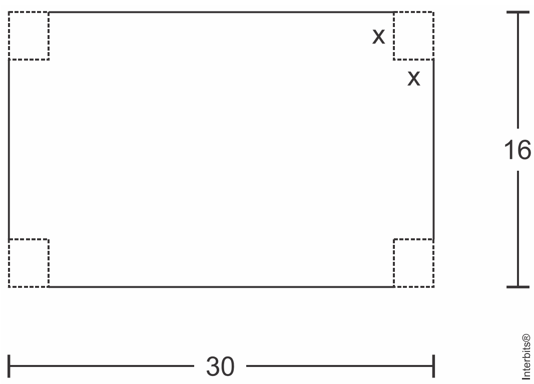
b) $z = \dfrac{y - x}{2}.$

c) $z = \sqrt{y - x}.$

d) $z = \sqrt{y^2 - x^2}.$

QUESTÃO 64 – IFSUL 2015

Uma caixinha aberta é feita de pedaços de papelão com 16 cm por 30 cm, cortando fora quadrados do mesmo tamanho dos quatro cantos e dobrando para cima os lados.



Seja A a área do fundo da caixa que resulta quando os quadrados tiverem lados de comprimento x, a expressão que melhor caracteriza essa área em termos de x é

a) $A(x) = 480 - 46x + x^2$

b) $A(x) = 480 - x^2$

c) $A(x) = 480 - 4^2$

d) $A(x) = 480 - 92x + 4x^2$

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	D
02	B
03	D
04	C
05	D
06	A
07	C
08	C
09	B
10	C
11	C
12	C
13	E
14	E
15	D
16	E
17	D
18	B
19	E
20	E
21	E
22	C
23	E
24	C
25	D
26	D
27	B
28	A
29	C
30	E
31	A
32	B

QUESTÃO	ALTERNATIVA
33	C
34	D
35	A
36	C
37	D
38	B
39	C
40	E
41	C
42	B
43	E
44	B
45	D
46	B
47	B
48	C
49	A
50	B
51	A
52	E
53	B
54	C
55	D
56	D
57	E
58	A
59	C
60	B
61	D
62	D
63	D
64	D

GEOMETRIA PLANA

POLÍGONOS & CÍRCULOS

ANDERSON MATEMÁTICA

POLÍGONOS

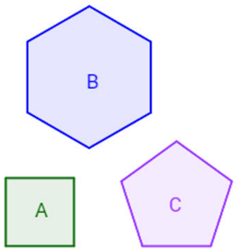
Polígono é uma figura geométrica plana formada por diversos elementos. Todavia, incialmente, um desses elementos é responsável pela definição dessas figuras: o lado.

O lado de um polígono é um segmento de reta que liga dois vértices adjacentes pertencente ao seu contorno. Os triângulos, por exemplo, possuem três lados; os retângulos possuem quatro lados, e os pentágonos possuem cinco lados, exatamente a mesma quantidade de segmentos de reta do contorno desses polígonos.

Os outros elementos presentes nos polígonos são: ângulos internos, ângulos externos, diagonais e vértices.

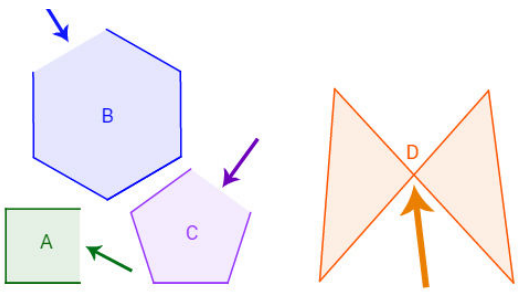
Para ser considerada polígono, uma figura geométrica precisa ser formada por uma linha única, fechada e formada apenas por segmentos de reta. Além disso, esses segmentos de reta não podem cruzar-se.

A figura abaixo apresenta alguns exemplos de polígonos:



Os polígonos A, B e C são formados por 4, 5 e 6 segmentos de reta, respectivamente.

Note que esses segmentos, em cada polígono, formam uma linha fechada e não se cruzam de forma alguma. A imagem seguinte apresenta alguns exemplos de figuras geométricas que não são polígonos.

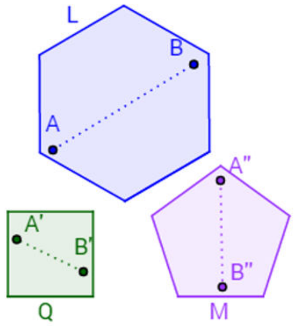


As figuras geométricas A, B e C não são fechadas, portanto, não podem ser consideradas polígonos. Já a figura D possui um cruzamento de segmentos de reta e, por essa razão, também não pode ser considerada polígono.

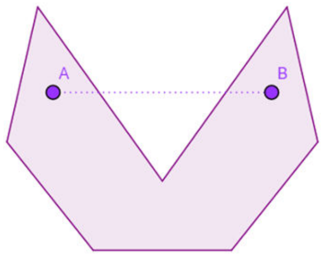
POLÍGONOS CONVEXOS

Dados dois pontos A e B quaisquer interiores a um polígono, se o segmento de reta determinado por esses dois pontos estiver inteiramente contido no interior do polígono, então esse polígono será convexo.

A figura abaixo apresenta alguns exemplos de polígonos convexos.



Note que, independentemente da posição dos pontos A e B, A' e B' ou A'' e B'', o segmento determinado por esses pontos sempre estará inteiramente contido no interior de seus respectivos polígonos. Por outro lado, a imagem abaixo representa um polígono não convexo.

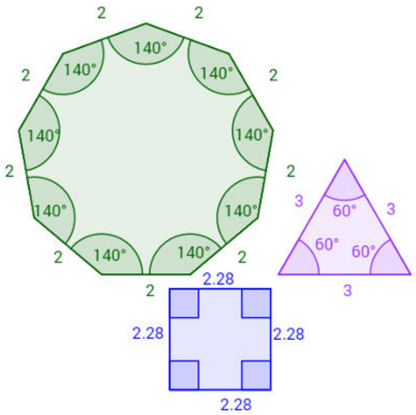


Isso acontece porque o segmento AB não está totalmente contido no interior do polígono, mesmo que os pontos A e B estejam.

Dica: Os polígonos que têm um vértice voltado para dentro, formando uma espécie de "boca", não são convexos.

POLÍGONOS REGULARES

Um polígono é considerado regular quando ele é convexo, possui todos os lados com comprimentos iguais e ângulos com a mesma medida. Observe na imagem abaixo alguns exemplos de polígonos regulares.

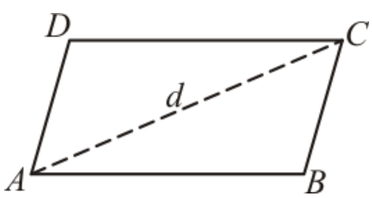


Observe que, em cada polígono da imagem acima, todos os lados e ângulos têm a mesma medida. Observe também que um polígono regular de quatro lados é sempre um quadrado e um polígono regular de três lados é sempre um triângulo equilátero.

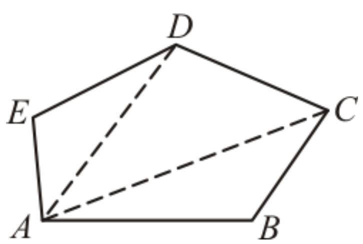
DIAGONAIS

Diagonal de um polígono é o segmento de reta que une dois de seus vértices não-consecutivos.

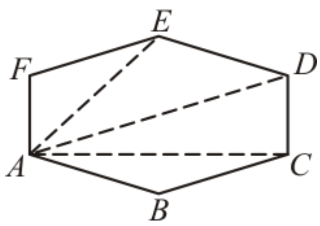
Tomando um quadrilátero qualquer, vemos que parte apenas uma diagonal de cada vértice. Por exemplo, do vértice A, parte apenas a diagonal AC.



Tomando um pentágono, temos, por exemplo, que do vértice A partem duas diagonais: AC e AD.



Já para um hexágono, temos, por exemplo, que do vértice A partem três diagonais: AC, AD e AE.



O que queremos é encontrar uma forma de determinar a quantidade de diagonais sem ter que traçá-las no polígono. Vejam que para um polígono de 4 lados, temos 1 diagonal partindo de um vértice; para um polígono de 5 lados, temos 2 diagonais partindo de um vértice; para um polígono de 6 lados temos 3 diagonais partindo de um vértice. Vejam que o número de diagonais que parte de um vértice é igual à quantidade de lados do polígono menos 3. E para um polígono de N lados, teremos N – 3 diagonais partindo de um vértice.

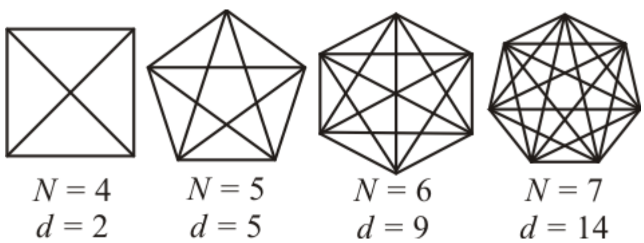
Como o número de vértices é igual ao número de lados do polígono, segue que teremos, com extremidade nos N vértices:

$$N \cdot (N - 3) \text{ diagonais}$$

No entanto, como cada diagonal tem extremidades em dois vértices, cada diagonal é contada duas vezes, por exemplo no quadrilátero, temos que as diagonais AC = CA, representam a mesma diagonal. Então, basta dividirmos por dois:

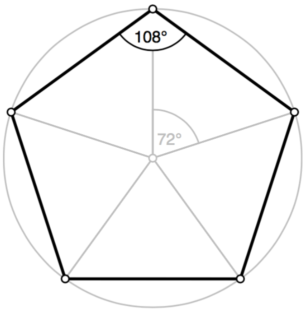
$$d = \frac{N \cdot (N - 3)}{2}$$

Para ilustrarmos esse fato, observamos as imagens abaixo:



PENTÁGONO

Em geometria, pentágono é um polígono com cinco lados.



A soma dos ângulos internos do pentágono é 540º, ou seja, em um pentágono regular cada ângulo interno tem a medida de 108º. O ângulo central de um pentágono regular mede 72°.

QUESTÃO 01 – IFSUL 2017

Um objeto de decoração tem a forma de um pentágono regular, apresentando todas as suas diagonais.

Sabe-se que cada diagonal foi pintada de uma cor diferente das demais.

Então, qual é o número de cores diferentes que foram utilizadas na pintura de tais diagonais?

Ⓐ 5
Ⓑ 6
Ⓒ 8
Ⓓ 9

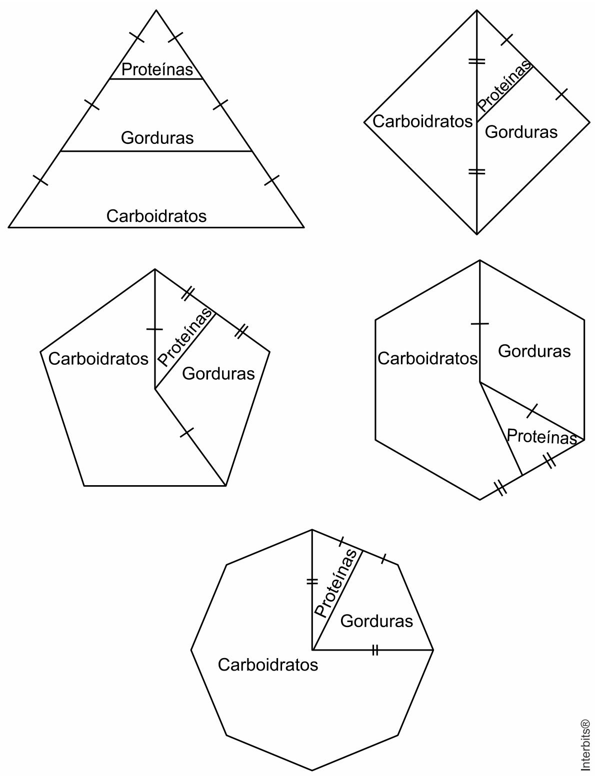
QUESTÃO 02 - ENEM 2015

Para uma alimentação saudável, recomenda-se ingerir, em relação ao total de calorias diárias, 60% de carboidratos, 10% de proteínas e 30% de gorduras.

Uma nutricionista, para melhorar a visualização dessas porcentagens, quer dispor esses dados em um polígono.

Ela pode fazer isso em um triângulo equilátero, um losango, um pentágono regular, um hexágono regular ou um octógono regular, desde que o polígono seja dividido em regiões cujas áreas sejam proporcionais às porcentagens mencionadas.

Ela desenhou as seguintes figuras:



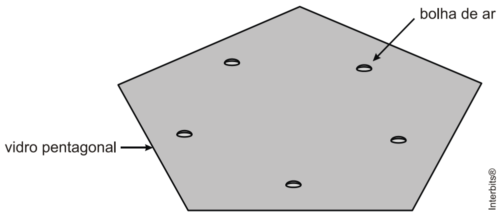
Entre esses polígonos, o único que satisfaz as condições necessárias para representar a ingestão correta de diferentes tipos de alimentos é o

Ⓐ triângulo.
Ⓑ losango.
Ⓒ pentágono.
Ⓓ hexágono.
Ⓔ octógono.

QUESTÃO 03 – UNESP 2012

Um artesão foi contratado para ornamentar os vitrais de uma igreja em fase final de construção. Para realizar o serviço, ele precisa de pedaços triangulares de vidro, os quais serão cortados a partir de um vidro pentagonal, com ou sem defeito, que possui n bolhas de ar (n = 0, 1, 2...).

Sabendo que não há 3 bolhas de ar alinhadas entre si, nem 2 delas alinhadas com algum vértice do pentágono, e nem 1 delas alinhada com dois vértices do pentágono, o artesão, para evitar bolhas de ar em seu projeto, cortou os pedaços de vidro triangulares com vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos vértices do pentágono.



Nessas condições, determine a lei de formação do número máximo de triângulos (T) possíveis de serem cortados pelo artesão, em função do número (n) de bolhas de ar contidas no vidro utilizado.

- **A** T = 2n + 3
- **B** T = 3n + 2
- **C** T = 2n + 1
- **D** T = n + 2
- **E** T = 2 - n

QUESTÃO 04 – UFRJ 2011

A *figura 1* a seguir apresenta um pentágono regular de lado $4L$; a *figura 2*, dezesseis pentágonos regulares, todos de lado L.

figura 1

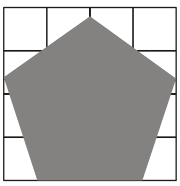
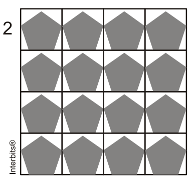


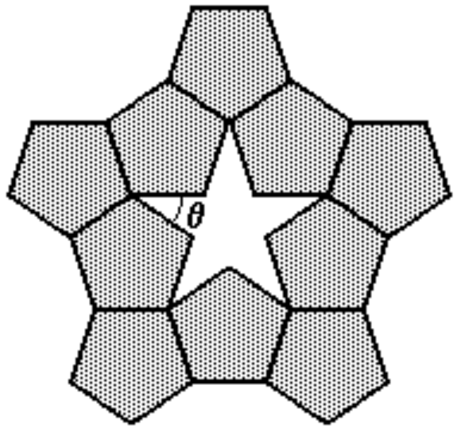
figura 2



Qual é maior: a área *A* do pentágono da *figura 1* ou a soma *B* das áreas dos pentágonos da *figura 2*? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 05 – UNIFESP 2003

Pentágonos regulares congruentes podem ser conectados, lado a lado, formando uma estrela de cinco pontas, conforme destacado na figura.

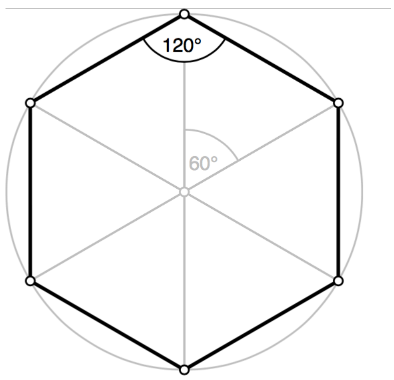


Nestas condições, o ângulo θ mede

- **A** 108°.
- **B** 72°.
- **C** 54°.
- **D** 36°.
- **E** 18°.

HEXÁGONO

Em geometria, hexágono é um polígono com seis lados.



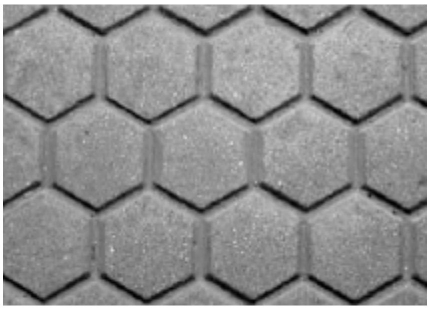
Caso seja regular, pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros. O hexágono possui 9 diagonais.

Como um hexágono regular, pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros, a sua área pode ser obtida através da fórmula:

$$A = 6 \cdot \frac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$$

QUESTÃO 06 – UPE 2017

Rafael decidiu colocar pedras com a forma de hexágonos regulares no piso da calçada de sua casa.



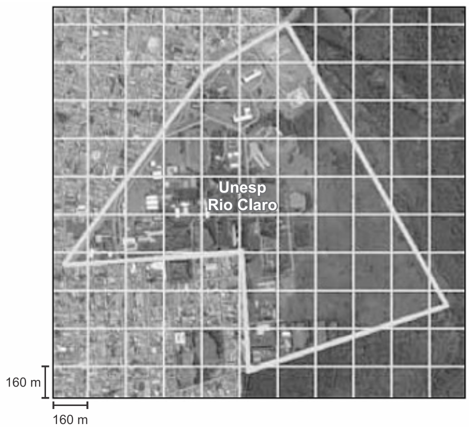
Sabendo que a área do piso da calçada mede $25{,}5\ m^2$, que a pedra tem $10\ cm$ de lado, desconsiderando a área ocupada pelos rejuntes, quantas pedras serão necessárias para cobrir todo o piso dessa calçada?

Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$.

A 225
B 425
C 765
D 1.000
E 1.250

QUESTÃO 07 – UNESP 2017

O hexágono marcado na malha quadriculada sobre a fotografia representa o contorno do campus da Unesp de Rio Claro, que é aproximadamente plano.



A área aproximada desse câmpus, em km² é um número pertencente ao intervalo

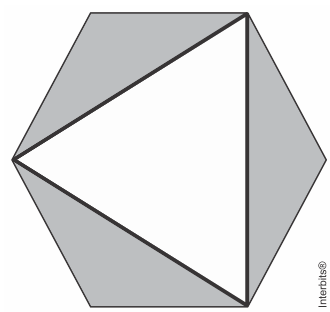
A $[0{,}8; 1{,}3[$
B $[1{,}8; 2{,}3[$
C $[2{,}3; 2{,}8[$
D $[1{,}3; 1{,}8[$
E $[0{,}3; 0{,}8[$

QUESTÃO 08 – CP2 2017

Um heliponto é um local destinado exclusivamente às operações de aterragem e decolagem de helicópteros. Diferentemente dos heliportos, os helipontos não dispõe de instalações e facilidades complementares, tais como área de taxiamento, reabastecimento, pátios e hangares para estacionamento e manutenção dos helicópteros.

Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Heliponto. Adaptado. Acesso em 22/10/2016.

Oscar, arquiteto, foi incumbido de fazer o projeto de um heliponto para a cobertura de um edifício comercial no centro da cidade. Decidiu fazer a pista de pouco no formato de hexágono regular com 12 metros de lado, sendo a chamada "área de toque" um triângulo equilátero inscrito no mesmo.



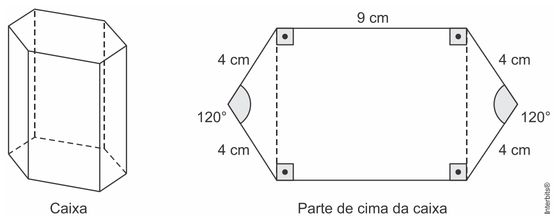
Dessa forma, por segurança, o helicóptero deveria pousar, sempre, na parte interna do triângulo equilátero. E, para facilitar a visualização da "área de toque", a região interna ao hexágono e externa ao triângulo equilátero seria pintada com tinta amarela fluorescente.

Sendo assim, a área a ser pintada com essa tinta amarela teria medida igual a

A $216\sqrt{3}\ m^2$.
B $216\ m^2$.
C $108\sqrt{3}\ m^3$.
D $108\ m^2$.

QUESTÃO 09 – CP2 2015

Certo fabricante vende biscoitos em forma de canudinhos recheados, de diversos sabores. A caixa em que esses biscoitos são vendidos tem a forma de um prisma hexagonal. A parte de cima dessa caixa tem a forma de um hexágono, com as medidas indicadas na figura:

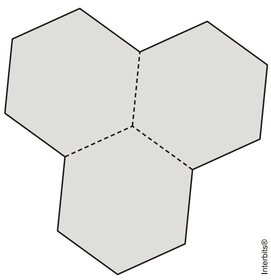


Considerando a aproximação racional $1,7$ para o valor de $\sqrt{3}$, a área da parte de cima dessa caixa, em centímetros quadrados, mede

A $49,6.$
B $63,2.$
C $74,8.$
D $87,4.$

QUESTÃO 10 – FUVEST 2014

Uma das piscinas do Centro de Práticas Esportivas da USP tem o formato de três hexágonos regulares congruentes, justapostos, de modo que cada par de hexágonos tem um lado em comum, conforme representado na figura abaixo. A distância entre lados paralelos de cada hexágono é de 25 metros.

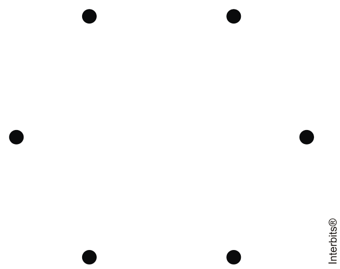


Assinale a alternativa que mais se aproxima da área da piscina.

A 1.600 m²
B 1.800 m²
C 2.000 m²
D 2.200 m²
E 2.400 m²

QUESTÃO 11 – CFTRJ 2013

Manuela desenha os seis vértices de um hexágono regular (figura abaixo) e une alguns dos seis pontos com segmentos de reta para obter uma figura geométrica. Essa figura ***não*** é seguramente um



A retângulo
B trapézio
C quadrado
D triângulo equilátero

QUESTÃO 12 – FATEC 2013

As "áreas de coberturas" a serem atendidas por um serviço de telefonia móvel são divididas em células, que são iluminadas por estações-radiobase localizadas no centro das células.

As células em uma mesma área de cobertura possuem diferentes frequências, a fim de que uma célula não interfira na outra.

Porém, é possível reutilizar a frequência de uma célula em outra célula relativamente distante, desde que a segunda não interfira na primeira.

Cluster é o nome dado ao conjunto de células vizinhas, o qual utiliza todo o espectro disponível. Uma configuração muito utilizada está exemplificada na Figura 1, que representa um modelo matemático simplificado da cobertura de rádio para cada estação-base.

O formato hexagonal das células é o mais prático, pois permite maior abrangência de cobertura, sem lacunas e sem sobreposições.

A figura 2 ilustra o conceito de reutilização de frequência por *cluster*, em que as células com mesmo número utilizam a mesma frequência.

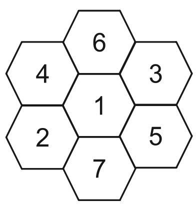


Figura 1: *cluster* de sete células

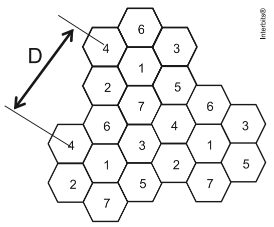


Figura 2: reuso de frequência

(www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialatalaia/pagina_2.asp e www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialsmsloc/pagina_3.asp Acesso em: 05.10.2012. Adaptado)

Na figura 2, os hexágonos são congruentes, regulares, têm lado de medida R e cobrem uma superfície plana. Para determinar a distância D, distância mínima entre o centro de duas células que permitem o uso da mesma frequência, pode-se traçar um triângulo cujos vértices são os centros de células convenientemente escolhidas, conforme a figura 3.

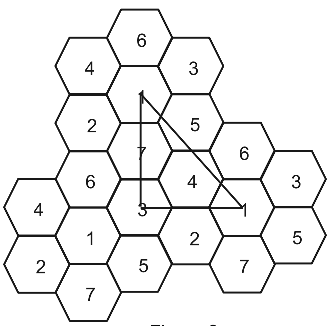


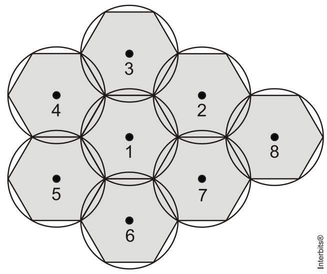
Figura 3

Assim sendo, o valor de D, expresso em função de R, é igual a

A $R\sqrt{21}$
B 5R
C $3R\sqrt{3}$
D $R\sqrt{30}$
E 6R

QUESTÃO 13 – UFF 2012

No estudo da distribuição de torres em uma rede de telefonia celular, é comum se encontrar um modelo no qual as torres de transmissão estão localizadas nos centros de hexágonos regulares, congruentes, justapostos e inscritos em círculos, como na figura a seguir.



Supondo que, nessa figura, o raio de cada círculo seja igual a 1 km, é correto afirmar que a distância $d_{3,8}$ (entre as torres 3 e 8), a distância $d_{3,5}$ (entre as torres 3 e 5) e a distância $d_{5,8}$ (entre as torres 5 e 8) são, respectivamente, em km, iguais à

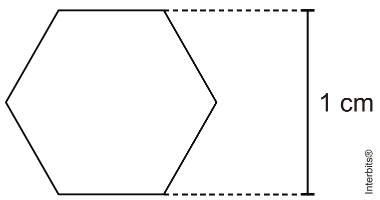
A $d_{3,8} = 2\sqrt{3},\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = 3 + 2\sqrt{3}.$
B $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = 5.$
C $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ d_{5,8} = 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2}.$
D $d_{3,8} = 2\sqrt{3},\ d_{3,5} = 3,\ d_{5,8} = \sqrt{21}.$
E $d_{3,8} = 4,\ d_{3,5} = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ d_{5,8} = \frac{9}{2}.$

QUESTÃO 14 – PUCRS 2012

Arquimedes, candidato a um dos cursos da Faculdade de Engenharia, visitou a PUCRS para colher informações.

Uma das constatações que fez foi a de que existe grande proximidade entre Engenharia e Matemática.

Para uma engrenagem mecânica, deseja-se fazer uma peça de formato hexagonal regular. A distância entre os lados paralelos é de 1 cm, conforme a figura abaixo.



O lado desse hexágono mede ______ cm.

A $\frac{1}{2}$

B $\frac{\sqrt{3}}{3}$

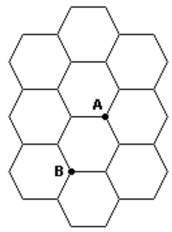
C $\sqrt{3}$

D $\frac{\sqrt{5}}{5}$

E 1

QUESTÃO 15 – PUCMG 2007

A figura representa os possíveis percursos realizados por um robô, programado para andar em frente seguindo os lados de hexágonos. Assim, partindo de A, o robô tem três opções distintas de caminho; e, na sequência, como não pode voltar, só pode escolher dois caminhos.



$\frac{1}{6}$

Supondo que esse robô parta de A, assinale a probabilidade de o mesmo se encontrar em B, depois de percorrer exatamente três lados de hexágonos.

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{3}$

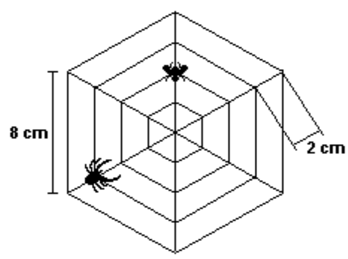
D $\frac{1}{2}$

E $\frac{2}{5}$

QUESTÃO 16 – UFLA 2007

As aranhas são notáveis geômetras, já que suas teias revelam variadas relações geométricas. No desenho, a aranha construiu sua teia de maneira que essa é formada por hexágonos regulares igualmente espaçados.

Qual é a menor distância que a aranha deve percorrer ao longo da teia para alcançar o infeliz inseto?



A 8 cm

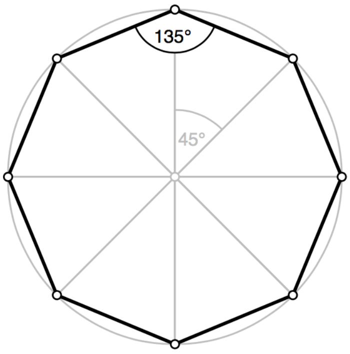
B 10 cm

C $8\sqrt{2}$ cm

D $10\sqrt{3}$ cm

OCTÓGONO

Em geometria, octógono é um polígono com oito lados (e portanto oito ângulos internos medindo 135º e oito ângulos externos medindo 45º, o ângulo central também mede 45º).



QUESTÃO 17 – IFPE 2017

Um porta-retratos tem a forma de um octógono regular conforme imagem a seguir.

Disponível em: <Fonte: http://www.mauriciojasso.com/galeria/cache/lo-nuevo/DSC07649-Resolucion-de-Escritorio.JPG_595.jpg>. Acesso: 02 out. 2016.

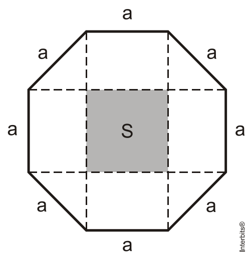
A medida de cada ângulo interno desse octógono é

- **A** 45°.
- **B** 60°.
- **C** 90°.
- **D** 135°.
- **E** 30°.

QUESTÃO 18 – INSPER 2014

As disputas de MMA (Mixed Martial Arts) ocorrem em ringues com a forma de octógonos regulares com lados medindo um pouco menos de 4 metros, conhecidos como “Octógonos”.

Medindo o comprimento exato de seus lados, pode-se calcular a área de um “Octógono” decompondo-o, como mostra a figura a seguir, em um quadrado, quatro retângulos e quatro triângulos retângulos e isósceles.

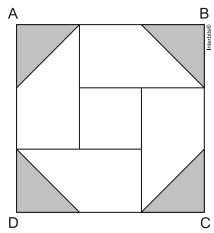


A medida do lado do quadrado destacado no centro da figura é igual à medida a do lado do “Octógono”. Se a área desse quadrado é S, então a área do “Octógono” vale

- **A** $S(2\sqrt{2}+1)$.
- **B** $S(\sqrt{2}+2)$.
- **C** $2S(\sqrt{2}+1)$.
- **D** $2S(\sqrt{2}+2)$.
- **E** $4S(\sqrt{2}+1)$.

QUESTÃO 19 – CFTMG 2011

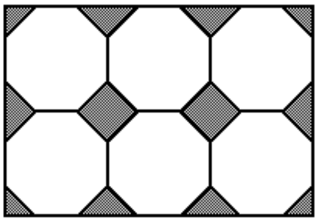
A figura abaixo representa o vitral de uma janela quadrada ABCD de área S, em que cada lado esta dividido em três segmentos congruentes. Retirando-se os quatro triângulos sombreados, obtém-se um octógono, cuja área é



- **A** $\frac{7}{9}S$
- **B** $\frac{5}{8}S$
- **C** $\frac{3}{4}S$
- **D** $\frac{2}{3}S$

QUESTÃO 20 – UFRGS 2007

Seis octógonos regulares de lado 2 são justapostos em um retângulo, como representado na figura adiante.



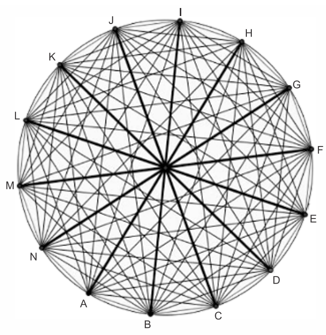
A soma das áreas das regiões sombreadas na figura é

(A) 16.
(B) $16\sqrt{2}$.
(C) 20.
(D) $20\sqrt{2}$.
(E) 24.

POLÍGONOS EM GERAL

QUESTÃO 21 – CP2 2016

A figura a seguir mostra um polígono regular de 14 lados e todas as suas diagonais:



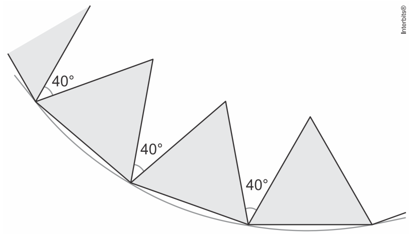
Fonte: https://clickexatas.wordpress.com. Acessado em 12/10/2015

O número de diagonais traçadas é de

(A) 77.
(B) 79.
(C) 80.
(D) 98.

QUESTÃO 22 – UFRGS 2016

Um desenhista foi interrompido durante a realização de um trabalho, e seu desenho ficou como na figura abaixo.



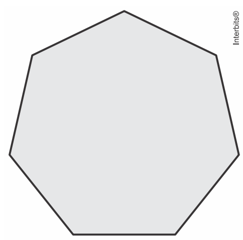
Se o desenho estivesse completo, ele seria um polígono regular composto por triângulos equiláteros não sobrepostos, com dois de seus vértices sobre um círculo, e formando um ângulo de $40°$, como indicado na figura.

Quando a figura estiver completa, o número de triângulos equiláteros com dois de seus vértices sobre o círculo é

(A) 10.
(B) 12.
(C) 14.
(D) 16.
(E) 18.

QUESTÃO 23 – IFSP 2016

Ana estava participando de uma gincana na escola em que estuda e uma das questões que ela tinha de responder era "quanto vale a soma das medidas dos ângulos internos do polígono regular da figura?"



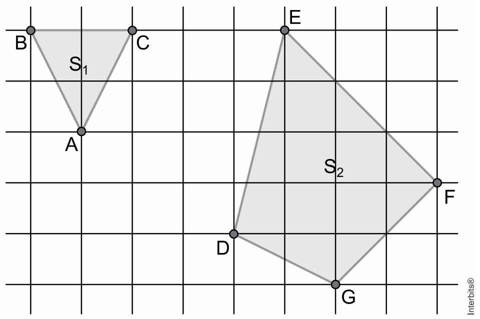
Para responder a essa pergunta, ela lembrou que seu professor ensinou que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°, e que todo polígono pode ser decomposto em um número mínimo de triângulos.

Sendo assim, Ana respondeu corretamente à pergunta dizendo:

(A) 720°
(B) 900°
(C) 540°
(D) 1.080°
(E) 630°

QUESTÃO 24 – UNESP 2015

Os polígonos ABC e DEFG estão desenhados em uma malha formada por quadrados. Suas áreas são iguais a S_1 e S_2, respectivamente, conforme indica a figura.



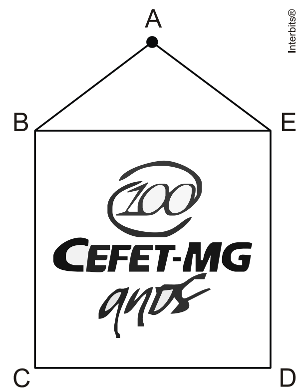
Sabendo que os vértices dos dois polígonos estão exatamente sobre pontos de cruzamento das linhas da malha, é correto afirmar que $\frac{S_2}{S_1}$ é igual a

A) 5,25.
B) 4,75.
C) 5,00.
D) 5,50.
E) 5,75.

QUESTÃO 25 – CFTMG 2012

Um painel quadrado BCDE, comemorativo dos 100 anos do CEFET-MG, encontra-se pendurado na parede de um dos corredores da escola, em um prego posicionado no ponto A, conforme figura abaixo.

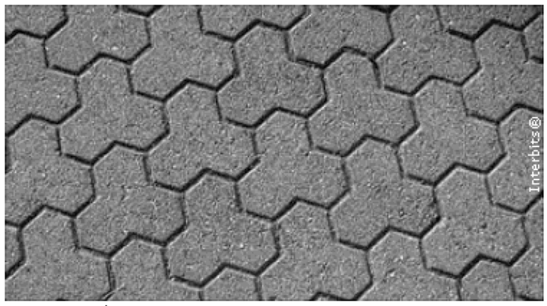
O triângulo ABE é isósceles e a medida do segmento AB corresponde a $\frac{2}{3}$ da medida do lado do quadrado BCDE.



Se o perímetro do polígono ABCDE é 13 metros, então, sua área, em m², é

A) $3(3+\sqrt{7})$.
B) $3(12+\sqrt{7})$.
C) $3(3+\frac{\sqrt{7}}{4})$.
D) $3(4+\frac{\sqrt{7}}{4})$.

QUESTÃO 26 – ENEM 2011



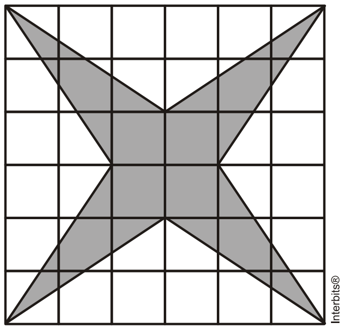
Disponível em: http://www.diaadia.pr.gov.br. Acesso em: 28 abr. 2010.

O polígono que dá forma a essa calçada é invariante por rotações, em torno de seu centro, de

A) 45°.
B) 60°.
C) 90°.
D) 120°.
E) 180°.

QUESTÃO 27 – UFRGS 2008

Na figura abaixo, a malha quadriculada é formada por quadrados de área 1. Os vértices do polígono sombreado coincidem com vértices de quadrados dessa malha.



A área do polígono sombreado é

Ⓐ 10.
Ⓑ 12.
Ⓒ 13.
Ⓓ 15.
Ⓔ 16.

QUESTÃO 28 – ENEM 2002

Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes.

Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

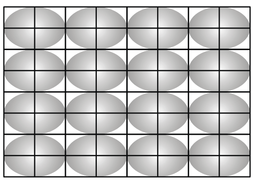


Figura 1: Ladrilhos retangulares pavimentando o plano

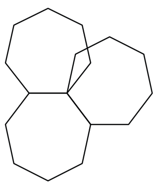
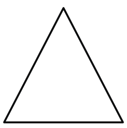
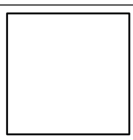
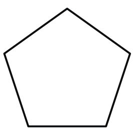
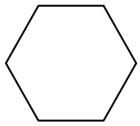
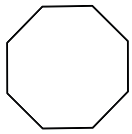
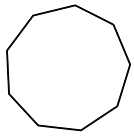


Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição)

Interbits®

A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono
Figura			
Ângulo interno	60°	90°	108°

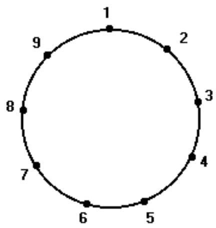
Nome	Hexágono	Octágono	Eneágono
Figura			
Ângulo interno	120°	135°	140°

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

Ⓐ triângulo.
Ⓑ quadrado.
Ⓒ pentágono.
Ⓓ hexágono.
Ⓔ eneágono.

QUESTÃO 29 – MACKENZIE 1997

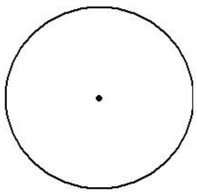
Os polígonos de k lados (k múltiplo de 3), que podemos obter com vértices nos 9 pontos da figura, são em número de:



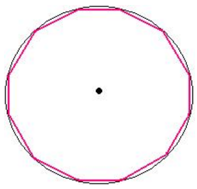
Ⓐ 83
Ⓑ 84
Ⓒ 85
Ⓓ 168
Ⓔ 169

CÍRCULO E SUAS PARTES

Para compreendermos a fórmula utilizada no cálculo da área de um círculo temos que imaginar uma circunferência:



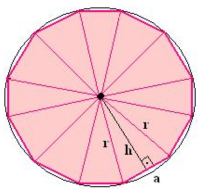
E dentro dela circunscrito um polígono regular:



Os seguimentos de reta que partem do centro da circunferência e que vão até o vértice do polígono regular são os raios do círculo.

Assim, formamos n triângulos no polígono regular.

Com base no cálculo da área de um hexágono regular, podemos dizer que a área de um polígono regular de n lados seria:



$$A = n \cdot \frac{a \cdot h}{2}$$

Porém, $n\ .\ a$ é o valor do perímetro do polígono regular, donde:

$$A = \frac{perímetro \cdot h}{2}$$

Ou ainda,

$$A = semiperímetro \cdot h$$

$$A = p \cdot h$$

Agora imagine se aumentarmos o número de lados do polígono regular, a tendência é do seu perímetro ficar cada vez mais parecido com o comprimento da circunferência, e a altura de cada triângulo formado no polígono regular ficar igual ao raio do círculo.

Assim, podemos concluir que a fórmula do cálculo da área de um círculo poderá ser indicada da mesma forma que a área de um polígono regular de n lados, veja a relação abaixo:

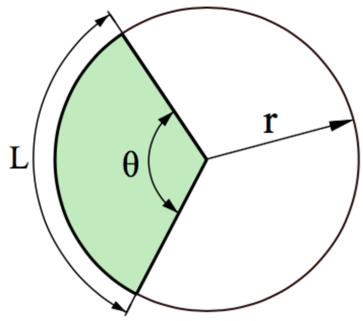
$$A = semiperímetro \cdot h$$

$$A = metade\ do\ comprimento\ da\ circunferêcia \cdot raio$$

$$A = \pi \cdot r \cdot r$$

$$A = \pi \cdot r^2$$

SETOR CIRCULAR



A circunferência pode ser dividida em partes, as quais recebem o nome de arcos. Os arcos de uma região circular são determinados de acordo com a medida do ângulo central, e é com base nessa informação que calcularemos a área de um setor circular.

Uma volta completa no círculo corresponde a 360°, valor que podemos associar à expressão do cálculo da área do círculo, $A = \pi \cdot r^2$.

Partindo dessa associação podemos determinar a área de qualquer arco com a medida do raio e do ângulo central, através de uma simples regra de três.

Observe:

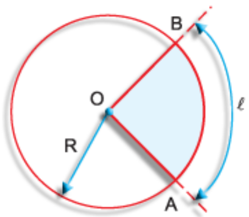
360° ------------- $\pi \cdot r^2$
θ° ------------------ A

$$A = \frac{\theta \cdot \pi \cdot r^2}{360°}$$

Caso o ângulo θ esteja em radianos, a área pode ser calculada por:

$$A = \frac{\theta \cdot r^2}{2}$$

Se não tivermos o ângulo θ,



a regra de três pode ser feita com o comprimento do arco:

$$2\pi r\text{-------------}\ \pi \cdot r^2$$
$$l\ \text{-------------------}\ A$$

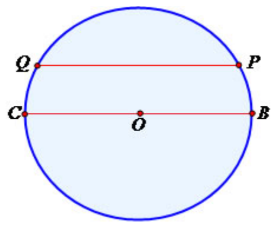
$$A = \frac{l \cdot r}{2}$$

Igualando as duas últimas equações, temos:

$$l = \theta \cdot r$$

SEGMENTO CIRCULAR

Um conjunto de pontos que possuem a mesma distância de um ponto central é denominado circunferência. Todo segmento de reta que liga dois pontos de uma circunferência recebe o nome de corda. A corda que passa pelo centro, dividindo a região em duas partes iguais, é chamada de diâmetro e corresponde ao dobro da medida do raio.

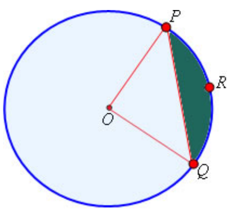


QP: corda da região circular

CB: é uma corda que passa pelo centro, dessa forma recebe o nome de diâmetro.

O segmento de uma região circular é limitado por uma corda e um arco.

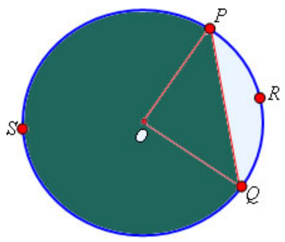
Observe:



Para determinarmos a área do segmento circular PQR formado pela corda PQ, devemos realizar o seguinte cálculo:

Área do segmento circular
=
Área do setor OPRQ – Área do triângulo OPQ

Nos casos em que o segmento é maior que o semicírculo, utilizamos a seguinte condição:



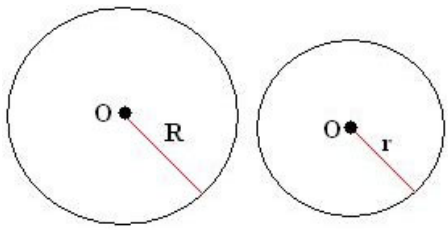
Área do segmento circular
=
Área do setor OPSQ + Área do triângulo POQ

COROA CIRCULAR

Quando duas ou mais circunferências possuem o mesmo centro, são denominadas concêntricas.

Nesse caso elas podem ter raio de tamanhos diferentes.

Observe:



Ao unirmos duas circunferências de mesmo centro com raios R e r, considerando R > r, temos que a diferença entre as áreas é denominada coroa circular.

Observe:

A área da coroa circular representada pode ser calculada através da diferença entre as áreas totais das duas circunferências, isto é, área do círculo maior menos a área do círculo menor.

Área da coroa
=
Área do círculo maior – Área do círculo menor

$$\text{Área da coroa} = \pi \cdot R^2 - \pi \cdot r^2$$

$$\text{Área da coroa} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

Se as circunferências não forem concêntricas, a maneira de calcular a área é exatamente a mesma.

Área da coroa
=
Área do círculo maior – Área do círculo menor

QUESTÃO 30 – FGV 2017

Suponha que fosse possível dar uma volta completa em torno da linha do Equador caminhando e que essa linha fosse uma circunferência perfeita na esfera terrestre.

Nesse caso, se uma pessoa de 2m de altura desse uma volta completa na Terra pela linha do Equador, o topo de sua cabeça, ao completar a viagem, teria percorrido uma distância maior que a sola dos seus pés em, aproximadamente,

Ⓐ 63 cm.
Ⓑ 12,6 m.
Ⓒ 6,3 km.
Ⓓ 12,6 km.
Ⓔ 63 km.

QUESTÃO 31 – IFBA 2017

Foi inaugurada uma praça municipal, de formato circular, com 30 m de raio, toda permeada por 21 refletores à sua volta. Foi projetada para que a distância entre dois refletores vizinhos fossem iguais.

Adotando o valor de $\pi = 3{,}15$; então a distância, em metros, entre cada dois dos refletores vizinhos foi de:

Ⓐ 7 m
Ⓑ 8 m
Ⓒ 9 m
Ⓓ 10 m
Ⓔ 11 m

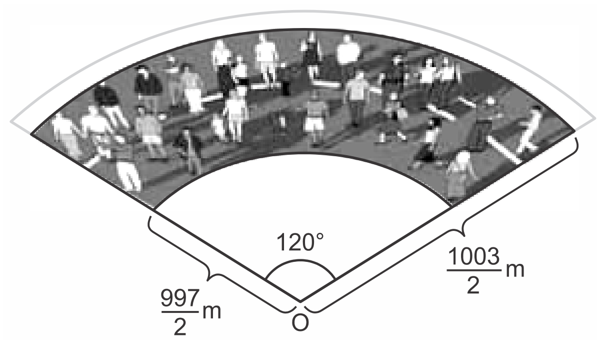
QUESTÃO 32 – UEL 2017

Com a finalidade de se calcular a quantidade de pessoas presentes em manifestações sociais em determinado trecho urbano, são utilizadas diferentes metodologias, sendo que uma delas consiste em quatro etapas:

1. estabelece-se a área A (em m^2) da região delimitada pelo trecho da manifestação;
2. posicionam-se alguns fiscais que ficam responsáveis, cada um, por uma sub-região fixa e exclusiva do trecho urbano, a fim de coletar, de maneira simultânea e periódica, quantas pessoas se encontram em sua sub-região no momento de cada medição;
3. calcula-se a média M de todas as medições realizadas por todos os fiscais;
4. ao final, declara-se que há $A \cdot M$ pessoas presentes na manifestação.

Suponha que uma manifestação ocorreu na região hachurada dada pelo setor de uma coroa circular de centro O (conforme figura) e que foi observada por 3 medições com 2 fiscais cada, cujas tabelas dos dados coletados encontram-se a seguir.

	Medição 1	Medição 2	Medição 3
Fiscal 1	3	3	4
Fiscal 2	2	4	5

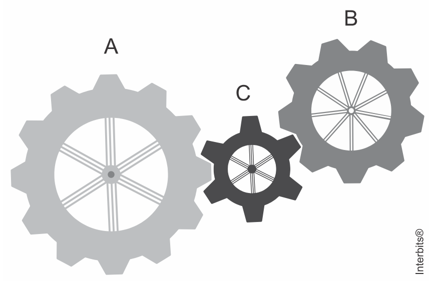


Considerando essa metodologia e a aproximação $\pi \approx \frac{22}{7}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a quantidade de pessoas que estiveram presentes na manifestação, naquele trecho.

Ⓐ 11 mil
Ⓑ 22 mil
Ⓒ 27 mil
Ⓓ 31 mil
Ⓔ 33 mil

QUESTÃO 33 – UPE 2017

Num sistema de engrenagens, cada uma tem seu raio, de forma que a engrenagem "A" tem raio com medida R; a "B" tem raio com medida igual à metade do raio da engrenagem "A", e a "C" tem raio com medida igual a um quarto do raio da engrenagem "A".

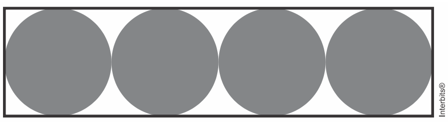


Sendo a medida do raio de "A" igual a 4 cm, quantas voltas "A" dará, quando "C" percorrer o equivalente a 3.600 cm?

A) 2.400
B) 1.200
C) 600
D) 300
E) 150

QUESTÃO 34 – IFPE 2017

Celso decidiu montar uma pequena horta no quintal de sua casa no formato de um retângulo, medindo 1 metro de largura por 4 metros de comprimento. Para fazer a irrigação, decidiu utilizar 4 aspersores, que molham regiões circulares com raio igual a 50 cm. As regiões molhadas, representadas em cinza, tangenciam-se entre si e também tangenciam as bordas da região retangular destinada à horta, como mostra a figura a seguir.



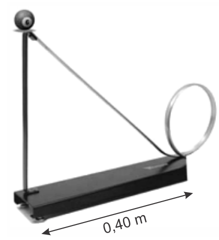
Algum tempo depois, Celso percebeu que algumas plantas não recebiam água suficiente para o seu desenvolvimento por estarem próximas à borda da horta. Assim, ele verificou que a área não molhada da horta corresponde a

(utilize $\pi = 3$)

A) 33,3% da área destinada à horta.
B) 16% da área destinada à horta.
C) 20% da área destinada à horta.
D) 10% da área destinada à horta.
E) 25% da área destinada à horta.

QUESTÃO 35 – UPE 2016

Num experimento de física realizado em sala, foi solta do topo de uma rampa de 0,30 m de altura uma esfera que percorreu certa distância, fazendo um *looping* no final.



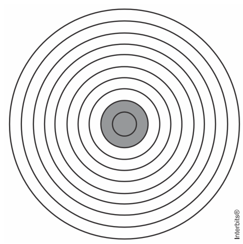
Partindo do princípio de que o triângulo representado é retângulo, qual a distância total aproximada que essa bola irá percorrer do topo da rampa até dar uma volta completa no aro da circunferência cujo raio é de 0,10 m?

Adote $\pi = 3,14$

A) 1,13 m
B) 1,28 m
C) 1,57 m
D) 2,00 m
E) 2,07 m

QUESTÃO 36 – FATEC 2016

Nas competições olímpicas de Tiro com Arco, o alvo possui 1,22 m de diâmetro. Ele é formado por dez circunferências concêntricas pintadas sobre um mesmo plano e a uma distância constante de 6,1 cm entre si, como vemos no esquema.

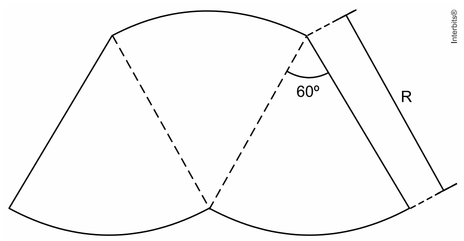


Podemos afirmar corretamente que a razão entre a área da região cinza e a área total do alvo, nessa ordem, é igual a

A) $\frac{3}{10}$.
B) $\frac{2}{15}$.
C) $\frac{1}{25}$.
D) $\frac{10}{61}$.

QUESTÃO 37 – ENEM 2015

O proprietário de um parque aquático deseja construir uma piscina em suas dependências. A figura representa a vista superior dessa piscina, que é formada por três setores circulares idênticos, com ângulo central igual a $60°$. O raio R deve ser um número natural.



O parque aquático já conta com uma piscina em formato retangular com dimensões $50\text{ m} \times 24\text{ m}$.
O proprietário quer que a área ocupada pela nova piscina seja menor que a ocupada pela piscina já existente.

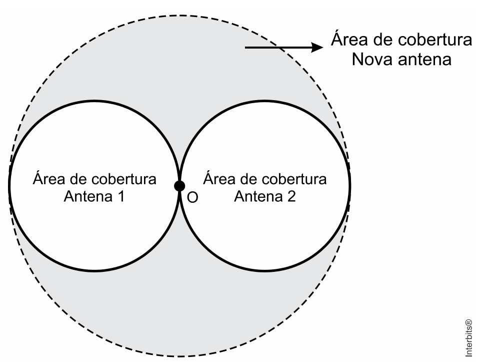
Considere $3{,}0$ como aproximação para π.

O maior valor possível para R, em metros, deverá ser

Ⓐ 16.
Ⓑ 28.
Ⓒ 29.
Ⓓ 31.
Ⓔ 49.

QUESTÃO 38 – ENEM 2015

Uma empresa de telefonia celular possui duas antenas que serão substituídas por uma nova, mais potente. As áreas de cobertura das antenas que serão substituídas são círculos de raio 2 km, cujas circunferências se tangenciam no ponto O, como mostra a figura.



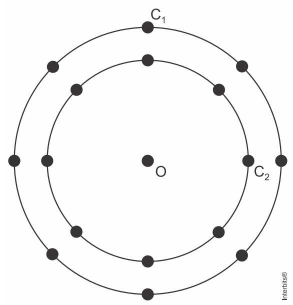
O ponto O indica a posição da nova antena, e sua região de cobertura será um círculo cuja circunferência tangenciará externamente as circunferências das áreas de cobertura menores.

Com a instalação da nova antena, a medida da área de cobertura, em quilômetros quadrados, foi ampliada em

Ⓐ 8π.
Ⓑ 12π.
Ⓒ 16π.
Ⓓ 32π.
Ⓔ 64π.

QUESTÃO 39 – ENEM PPL 2015

A figura é uma representação simplificada do carrossel de um parque de diversões, visto de cima. Nessa representação, os cavalos estão identificados pelos pontos escuros, e ocupam circunferências de raios 3 m e 4 m, respectivamente, ambas centradas no ponto O. Em cada sessão de funcionamento, o carrossel efetua 10 voltas.



Quantos metros uma criança sentada no cavalo C_1 percorrerá a mais do que uma criança no cavalo C_2, em uma sessão? Use 3,0 como aproximação para π.

Ⓐ 55,5
Ⓑ 60,0
Ⓒ 175,5
Ⓓ 235,5
Ⓔ 240,0

QUESTÃO 40 – ENEM PPL 2014

Um homem, determinado a melhorar sua saúde, resolveu andar diariamente numa praça circular que há em frente à sua casa.

Todos os dias ele dá exatamente 15 voltas em torno da praça, que tem 50 m de raio.
Use 3 como aproximação para π.

Qual é a distância percorrida por esse homem em sua caminhada diária?

Ⓐ 0,30 km
Ⓑ 0,75 km
Ⓒ 1,50 km
Ⓓ 2,25 km
Ⓔ 4,50 km

QUESTÃO 41 – ENEM PPL 2013

O símbolo internacional de acesso, mostrado na figura, anuncia local acessível para o portador de necessidades especiais. Na concepção desse símbolo, foram empregados elementos gráficos geométricos elementares.

Regras de acessibilidade ao meio físico para o deficiente.

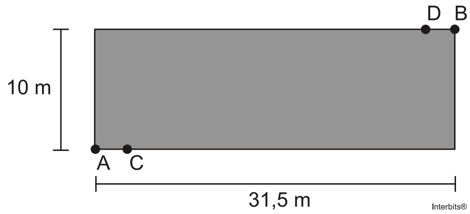
Disponível em: www.ibdd.org.br.
Acesso em: 28 jun. 2011(adaptado).

Os elementos geométricos que constituem os contornos das partes claras da figura são

Ⓐ retas e círculos.
Ⓑ retas e circunferências.
Ⓒ arcos de circunferências e retas.
Ⓓ coroas circulares e segmentos de retas.
Ⓔ arcos de circunferências e segmentos de retas.

QUESTÃO 42 – ENEM PPL 2013

O proprietário de um terreno retangular medindo 10 m por 31,5 m deseja instalar lâmpadas nos pontos *C* e *D*, conforme ilustrado na figura:



Cada lâmpada ilumina uma região circular de 5 m de raio. Os segmentos *AC* e *BD* medem 2,5 m. O valor em m² mais aproximado da área do terreno iluminada pelas lâmpadas é

(Aproxime $\sqrt{3}$ para 1,7 e π para 3.)

Ⓐ 30.
Ⓑ 34.
Ⓒ 50.
Ⓓ 61.
Ⓔ 69.

QUESTÃO 43 – ENEM 2012

Em exposições de artes plásticas, é usual que estátuas sejam expostas sobre plataformas giratórias.

Uma medida de segurança é que a base da escultura esteja integralmente apoiada sobre a plataforma.

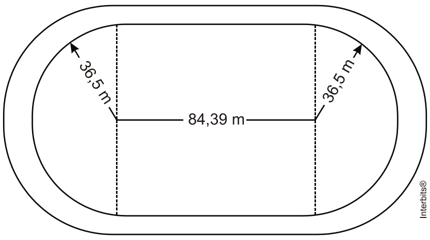
Para que se providencie o equipamento adequado, no caso de uma base quadrada que será fixada sobre uma plataforma circular, o auxiliar técnico do evento deve estimar a medida *R* do raio adequado para a plataforma em termos da medida *L* do lado da base da estatua.

Qual relação entre *R* e *L* o auxiliar técnico deverá apresentar de modo que a exigência de segurança seja cumprida?

Ⓐ $R \geq L/\sqrt{2}$
Ⓑ $R \geq 2L/\pi$
Ⓒ $R \geq L/\sqrt{\pi}$
Ⓓ $R \geq L/2$
Ⓔ $R \geq L/\left(2\sqrt{2}\right)$

QUESTÃO 44 – ENEM 2011

O atletismo é um dos esportes que mais se identificam com o espírito olímpico. A figura ilustra uma pista de atletismo.



BIEMBENGUT, M. S. *Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus.* 1990. Dissertação de Mestrado. IGCE/UNESP, Rio Claro, 1990 (adaptado).

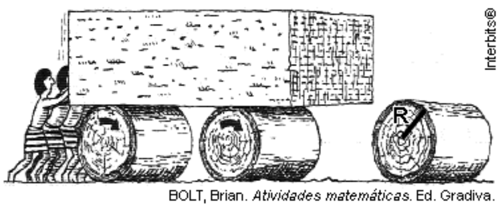
A pista é composta por oito raias e tem largura de 9,76 m. As raias são numeradas do centro da pista para a extremidade e são construídas de segmentos de retas paralelas e arcos de circunferência. Os dois semicírculos da pista são iguais.

Se os atletas partissem do mesmo ponto, dando uma volta completa, em qual das raias o corredor estaria sendo beneficiado?

Ⓐ 1
Ⓑ 4
Ⓒ 5
Ⓓ 7
Ⓔ 8

QUESTÃO 45 – ENEM 2010

A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.



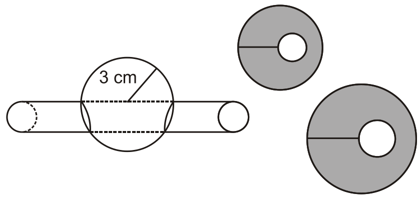
BOLT, Brian. *Atividades matemáticas*. Ed. Gradiva.

Representando por R o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal y do bloco de pedra em função de R, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

Ⓐ y = R.
Ⓑ y = 2R.
Ⓒ y = πR.
Ⓓ y = 2πR.
Ⓔ y = 4πR.

QUESTÃO 46 – ENEM 2009 (CANCELADO)

Um chefe de cozinha utiliza um instrumento cilíndrico afiado para retirar parte do miolo de uma laranja. Em seguida, ele fatia toda a laranja em secções perpendiculares ao corte feito pelo cilindro. Considere que o raio do cilindro e da laranja sejam iguais a 1 cm e a 3 cm, respectivamente.

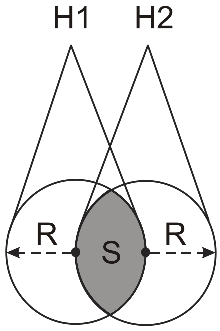


A área da maior fatia possível é

Ⓐ duas vezes a área da secção transversal do cilindro.
Ⓑ três vezes a área da secção transversal do cilindro.
Ⓒ quatro vezes a área da secção transversal do cilindro.
Ⓓ seis vezes a área da secção transversal do cilindro.
Ⓔ oito vezes a área da secção transversal do cilindro.

QUESTÃO 47 – ENEM 2009 (CANCELADO)

Dois holofotes iguais, situados em H_1 e H_2, respectivamente, iluminam regiões circulares, ambas de raio R. Essas regiões se sobrepõem e determinam uma região S de maior intensidade luminosa, conforme figura.



Área do setor circular: $A_{SC} = \dfrac{\alpha R^2}{2}$, á em radianos.

A área da região S, em unidades de área, é igual a

Ⓐ $\dfrac{2\pi R^2}{3} - \dfrac{\sqrt{3}R^2}{2}$

Ⓑ $\dfrac{\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)R^2}{12}$

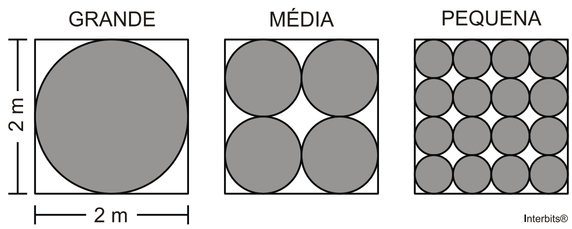
Ⓒ $\dfrac{\pi R^2}{12} - \dfrac{R^2}{8}$

Ⓓ $\dfrac{\pi R^2}{2}$

Ⓔ $\dfrac{\pi R^2}{3}$

QUESTÃO 48 – ENEM 2004

Uma empresa produz tampas circulares de alumínio para tanques cilíndricos a partir de chapas quadradas de 2 metros de lado, conforme a figura. Para 1 tampa grande, a empresa produz 4 tampas médias e 16 tampas pequenas.



Área do círculo: πr^2

As sobras de material da produção diária das tampas grandes, médias e pequenas dessa empresa são doadas, respectivamente, a três entidades: I, II e III, para efetuarem reciclagem do material. A partir dessas informações, pode-se concluir que

Ⓐ a entidade I recebe mais material do que a entidade II.

Ⓑ a entidade I recebe metade de material do que a entidade III.

Ⓒ a entidade II recebe o dobro de material do que a entidade III.

Ⓓ as entidades I e II recebem, juntas, menos material do que a entidade III.

Ⓔ as três entidades recebem iguais quantidades de material.

QUESTÃO 49 – ENEM 2010

As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à linha do equador e em pontos diametralmente postos no globo terrestre.

Considerando o raio da Terra igual a 6370km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente

Ⓐ 16 horas.

Ⓑ 20 horas.

Ⓒ 25 horas.

Ⓓ 32 horas.

Ⓔ 36 horas.

ANDERSON MATEMÁTICA

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	A
02	C
03	C
04	ÁREAS IGUAIS
05	D
06	D
07	A
08	C
09	C
10	A
11	C
12	A
13	D
14	B
15	E
16	B
17	D
18	C
19	A
20	E
21	A
22	E
23	B
24	A
25	C
26	D
27	B
28	B
29	E
30	B
31	C
32	A
33	E
34	E
35	A
36	C
37	B
38	A
39	B
40	E
41	E
42	D
43	A
44	A
45	E
46	E
47	A
48	E
49	C

GEOMETRIA ESPACIAL

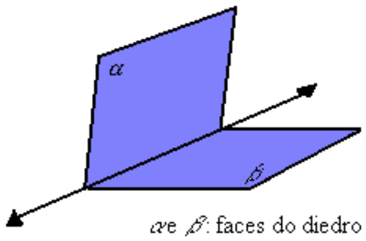
POLIEDROS

ANDERSON
MATEMÁTICA

GEOMETRIA ESPACIAL

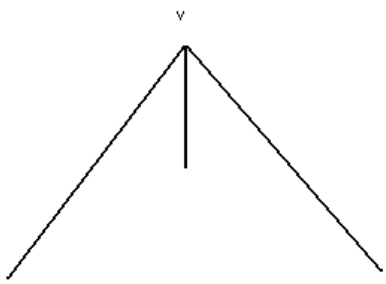
DIEDROS

Dois semiplanos não coplanares, com origem numa mesma reta, determinam uma figura geométrica chamada ângulo diédrico, ou simplesmente *diedro*.



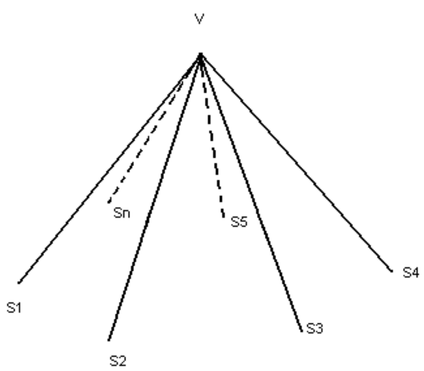
TRIEDROS

Três semirretas não coplanares, com origem no mesmo ponto, determinam três ângulos que formam uma figura geométrica chamada ângulo triédrico, ou simplesmente *triedro*.



ÂNGULO POLIÉDRICO

Sejam n semirretas de mesma origem ($n \geq 3$) tais que nunca fiquem três num mesmo semipleno. Essas semirretas determinam n ângulos em que o plano de cada um deixa as outras semirretas em um mesmo semi-espaço. A figura formada por esses ângulos é o ***ângulo poliédrico***.

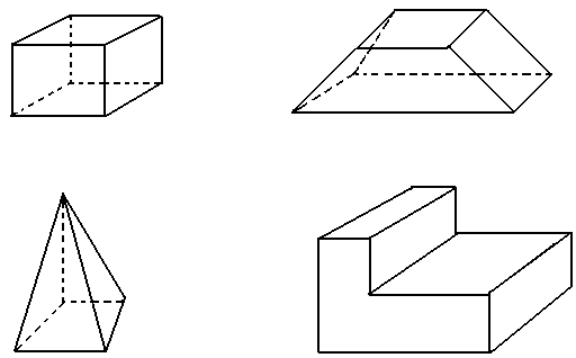


A origem das semirretas S_1, S_2, ..., S_n é o vértice V.

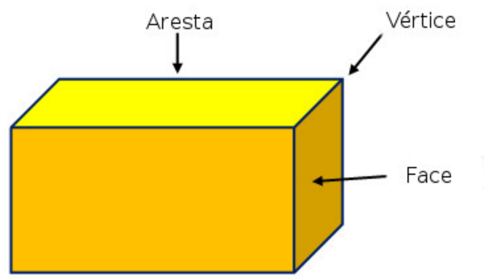
POLIEDROS

Chamamos de poliedro o sólido limitado por quatro ou mais polígonos planos, pertencentes a planos diferentes e que têm, dois a dois, somente uma aresta em comum.

Veja alguns exemplos:



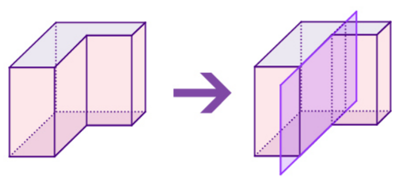
- Os polígonos são as ***faces*** do poliedro;
- Os lados dos polígonos são as ***arestas*** do poliedro; e
- Os vértices dos polígonos são os ***vértices*** do poliedro.



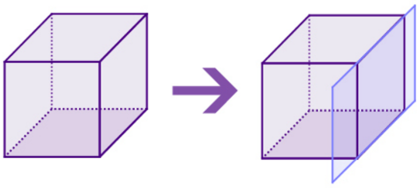
POLIEDROS CONVEXOS OU NÃO CONVEXOS

Um poliedro é chamado convexo quando o plano que contém cada face deixa todas as outras em um mesmo semi-espaço. Na prática, não é necessário testar essa definição para todas as faces de um poliedro, mas apenas para aquelas que potencialmente possam classificá-lo como não convexo.

Por exemplo: O poliedro abaixo é não convexo. Para ter certeza disso, desenhamos uma parte de um plano que contém uma de suas faces. É evidente, escolhemos a face problemática para percebermos isso.



Já na figura abaixo, um cubo, um exemplo de um poliedro convexo. Note que ele não possui "concavidades", ou seja, nenhuma de suas faces esta "voltada para dentro" do poliedro.

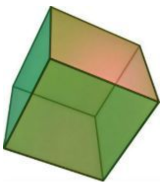


CLASSIFICAÇÃO

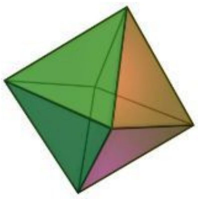
Os poliedros convexos possuem nomes especiais de acordo com o número de faces, por exemplo:

- Tetraedro: quatro faces;

- Hexaedro: seis faces;



- Octaedro: oito faces;



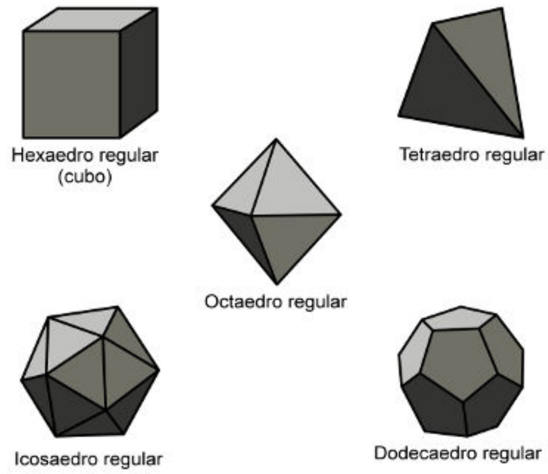
- Dodecaedro: doze faces.

- Icosaedro: vinte faces.

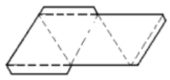
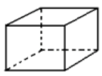
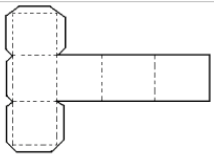
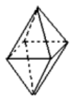
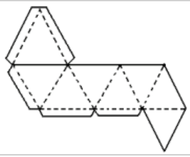
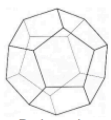
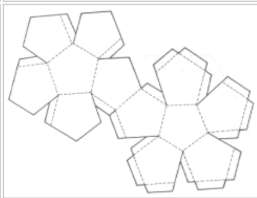
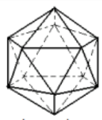
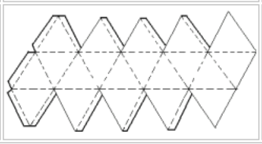
POLIEDROS REGULARES

Um poliedro convexo é dito regular se suas faces são polígonos regulares, cada um com o mesmo número de lados e, para todo vértice, converge um mesmo número de arestas.

Existem cinco poliedros regulares:



PLANIFICAÇÃO DOS POLIEDROS REGULARES

Poliedro	Planificação	Elementos
 Tetraedro		4 faces triangulares 4 vértices 6 arestas
 Hexaedro		6 faces quadrangulares 8 vértices 12 arestas
 Octaedro		8 faces triangulares 6 vértices 12 arestas
 Dodecaedro		12 faces pentagonais 20 vértices 30 arestas
 Icosaedro		20 faces triangulares 12 vértices 30 arestas

RELAÇÃO DE EULER

A relação de Euler é uma fórmula matemática que relaciona os números de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo.

Essa relação é dada pela seguinte expressão:

$$V - A + F = 2$$

Onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

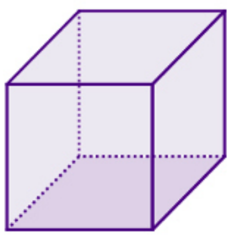
Essa relação é válida para todo poliedro convexo, mas existem alguns poliedros não convexos para os quais ela também pode ser verificada. Dessa forma, dizemos que todo poliedro convexo é Euleriano (isso significa que para ele vale a relação de Euler), mas nem todo poliedro Euleriano é convexo.

CONTANDO OS ELEMENTOS DE UM POLIEDRO

Para verificar a validade da relação de Euler, escolheremos dois poliedros convexos e contaremos seus elementos. Depois disso, verificaremos se o número de vértices, arestas e faces realmente satisfazem a relação de Euler.

Observe:

1 – Primeiramente, contaremos o número de faces, vértices e arestas de um cubo:



Faces: 6

Arestas: 12

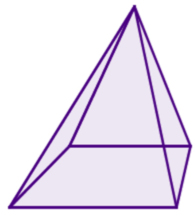
Vértices: 8

Agora, verificaremos a relação de Euler:

$$V - A + F = 8 - 12 + 6 = 14 - 12 = 2$$

Para o primeiro poliedro convexo, o cubo, a relação de Euler se verifica.

2 – Verificaremos agora a relação de Euler para a pirâmide quadrangular convexa.



Faces: 5

Arestas: 8

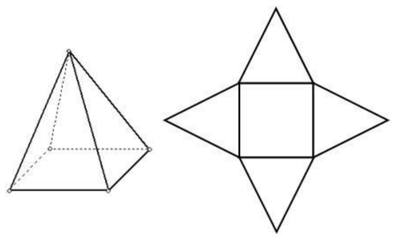
Vértices: 5

$$V - A + F = 5 - 8 + 5 = 10 - 8 = 2$$

E a relação de Euler também se verifica para a pirâmide quadrangular convexa.

RELAÇÃO ENTRE A QUANTIDADE DE ARESTAS DE UM POLIEDRO E A QUANTIDADE DE LADOS DE TODOS OS POLÍGONOS QUE FORMAM O POLIEDRO

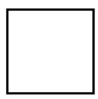
Analise o pentaedro (pirâmide de base quadrangular) a seguir:



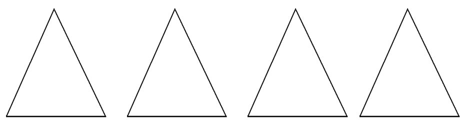
Perceba que o pentaedro possui:

- **Cinco** vértices;
- **Cinco** faces;
- **Oito** arestas.

As cinco faces são, na verdade, **um** quadrado e **quatro** triângulos.



Um quadrado tem quatro lados.

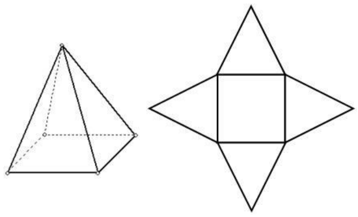


E cada triângulo tem três lados, sendo assim, temos doze lados em quatro triângulos.

Perceba que temos um total de dezesseis lados.

$$1 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 4 + 12 = 16$$

Para formarmos o pentaedro, é necessário juntar os lados, de dois em dois, de modo que cada dois lados juntos se transformem em uma aresta.

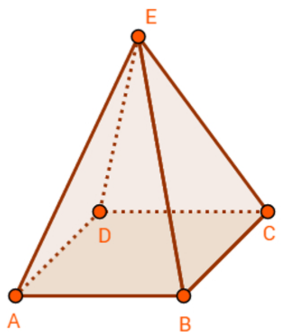


Esse é o motivo pelo qual temos 16 lados juntando todos os lados dos polígonos que constituem o poliedro, no entanto, temos apenas 8 arestas.

Conclui-se então, que o número de arestas A de um poliedro é a metade da quantidade total de lados L dos polígonos que constituem o poliedro.

$$A = \frac{L}{2}$$

RELAÇÃO ENTRE A QUANTIDADE DE ARESTAS DE UM POLIEDRO E A QUANTIDADE TOTAL DE ARESTAS QUE SAEM DOS VÉRTICES



Observe, novamente, que o pentaedro possui:

- **Cinco** vértices;
- **Cinco** faces;
- **Oito** arestas.

De cada um dos vértices A, B, C e D saem três arestas, e do vértice E saem quatro arestas.

Temos um total de $4 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 12 + 4 = 16$ arestas saindo dos vértices do poliedro.

No entanto, só temos oito arestas no poliedro. Isso se deve ao fato de que a aresta que sai de um vértice é a mesma que chega.

Conclui-se então, que o número de arestas A de um poliedro é a metade da quantidade total de arestas que saem dos vértices de um poliedro.

$$A = \frac{arestas\ que\ saem\ dos\ vértices}{2}$$

SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE TODAS AS FACES DE UM POLIEDRO

Sabemos que a soma S dos ângulos internos de um polígono convexo é dada por $S = 180^o(n-2)$, em que n é a quantidade de lados do polígono.

Considere F o número de faces do poliedro. Ao aplicarmos essa fórmula para cada delas, teremos:

$$S_1 = 180^o(n_1 - 2)$$
$$S_2 = 180^o(n_2 - 2)$$
$$\cdots$$
$$S_F = 180^o(n_F - 2)$$

Somando todas as equações obtidas:

$$S_{itf} = 180^o(n_1 + n_2 + \cdots + n_F - 2 - 2 - \cdots - 2)$$

$$S_{itf} = 180^o(n_1 + n_2 + \cdots + n_F - 2F)$$

$$S_{itf} = 180^o(n_1 + n_2 + \cdots + n_F) - 360^oF$$

Perceba que $n_1 + n_2 + \cdots + n_F$ é o número total de lados dos polígonos que constituem o poliedro, que coincide com o dobro do número A de arestas do poliedro. Daí:

$$S_{itf} = 180^o \cdot 2A - 360^oF$$

$$S_{itf} = 360^oA - 360^oF$$

$$S_{itf} = 360^o(A - F)$$

Porém, da Relação de Euler, $A - F = V - 2$, portanto:

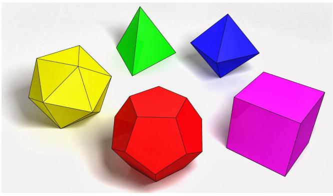
$$S_{itf} = 360^o(V - 2)$$

Em que S_{itf} é a soma de todos os ângulos internos de todas as faces de um poliedro.

A TEORIA ATÔMICO/GEOMÉTRICA DOS ELEMENTOS EM PLATÃO

Existe uma classificação especial de poliedros chamada de poliedros de Platão ou sólidos de Platão. Para que um sólido possa ser um poliedro de Platão, é necessário que o poliedro obedeça às seguintes disposições:

- Todas as faces devem ter a mesma quantidade n de arestas;
- Todos os vértices devem ser formados pela mesma quantidade m de arestas;
- A Relação de Euler deve valer: $V - A + F = 2$, em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces.



Um poliedro convexo é dito um poliedro regular apenas se for um poliedro de Platão e também se todas as suas faces forem formadas por polígonos regulares idênticos. Portanto, podemos dizer que um poliedro regular é um poliedro de Platão, mas não vale a recíproca.

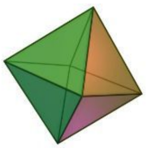
Antigos pitagóricos já haviam associado os 4 elementos a 4 dos poliedros regulares, Platão viria a associar o quinto poliedro a um quinto elemento, produzindo as seguintes correlações.

TETRAEDRO

4 Vértices, 4 Arestas, 4 FACES (Triangulares).

Essa pirâmide de 3 lados na base, é a mais simples estrutura sólida, tridimensional que pode existir, por isso ela representava o elemento mais leve, o FOGO. Dada sua forma, suas pontas agudas explicariam a propriedade destrutiva e penetrante do calor.

OCTAEDRO



6 Vértices, 12 Arestas, 8 FACES (Triangulares).

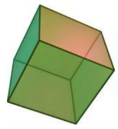
A "pirâmide de 4 lados dupla" era tida como a forma das partículas do AR, sendo suficientemente leve para flutuar e penetrar em todo o espaço "vazio".

ICOSAEDRO

12 Vértices, 30 Arestas, 20 FACES (Triangulares).

Dada a seu peso e suas bases pequenas, passíveis de rolar com facilidade, fluidez, esse poliedro constituiria para os antigos as partículas da ÁGUA.

HEXAEDRO



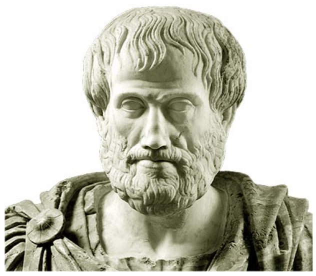
8 Vértices, 12 Arestas, 6 FACES (Quadrangulares).

O "Cubo", dada a sua estabilidade e facilidade com que pode ser empilhado formando estruturas maiores, sugeria aos filósofos antigos ser a estrutura fundamental do elemento TERRA.

DODECAEDRO

20 Vértices, 30 Arestas, 12 FACES (Pentagonais).

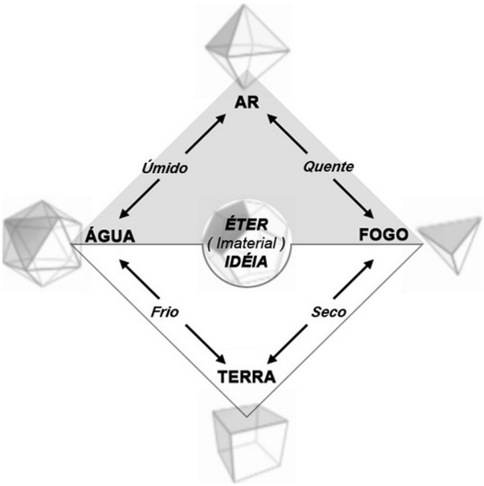
Para Platão, Pitágoras e muitos filósofos antigos, o Dodecaedro representava o QUINTO ELEMENTO, a QUINTAESSÊNCIA, que permeava a tudo no Universo, sendo o poliedro mais próximo da Esfera, a forma perfeita. No caso platônico, evidentemente se referia também à Alma/Idéia.



Enfim, Aristóteles de Estagira (358-322 AEC) viria a acrescentar a noção das 4 Qualidades: Frio, Quente, Seco e Úmido, que explica de outra forma a noção dos 4 elementos, sendo a Água a fusão das qualidades FRIA e ÚMIDA, o Fogo QUENTE e SECO, o Ar QUENTE e ÚMIDO e a Terra FRIA e SECA.

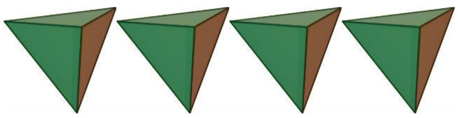
Aristóteles também considerou o Quinto Elemento, que chamou de Éter, sendo um elemento que só existia na ESFERA SUPRALUNAR, isto é, no espaço em volta da Terra, que já era considerada como esferoide, além da órbita da Lua.

Podemos então esquematizar os elementos da seguinte forma.

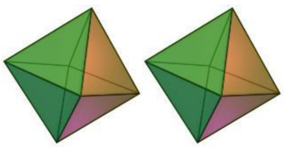


Os poliedros então eram vistos como partículas fundamentais de cada elemento, e é especialmente notável que apenas 3 poliedros compartilhem o mesmo tipo de face, o que sugeriu a Platão o motivo pelo qual eles podiam realizar transformações entre si.

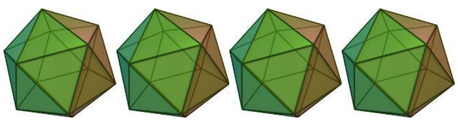
Quatro partículas de FOGO, por exemplo, possuem 4 faces cada, totalizando 16 triâgulos equiláteros, que seriam os átomos, que podem ser desmontados e remodelados em duas partículas de AR, que possuem cada qual 8 triâgulos.



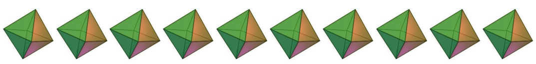
=



Quatro partículas de Água, possuindo 20 faces triangulares cada (80 ao todo), poderiam ser transformadas em 10 partículas de Ar. Essa ideia podia explicar a propriedade da água em vaporizar, das nuvens se formarem no ar, e chover.



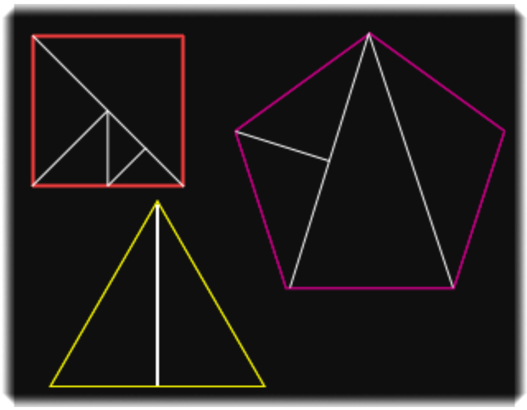
=



Essa teoria tinha a peculiar capacidade de ser bastante condizente com a observação, visto que era fácil perceber a transformação da ÁGUA em AR, e vice-versa, bem como do FOGO em AR, e vice-versa, no ato da combustão e apagamento da chama. Por outro lado, transformações envolvendo a TERRA não seriam observáveis, devido aos átomos desta última terem formato diferente.

Embora as faces do Hexaedro, Cubo, serem quadrados, Platão considerava que os átomos também eram triangulares, subdivisões dos quadrados, porém não eram equiláteros. E enfim, o mesmo se daria então com o Quinto Elemento, que comporia a Alma e as Ideias Imateriais, e isso explicava a diferença de substância entre os 4 elementos e a essência imortal.

Essa teoria, no entanto, tem seu ponto fraco, que é a separação da TERRA dos demais elementos, quando é claro que eles interagem. Platão chega a tentar a solução de dividir os triângulos equiláteros em dois triângulos escalenos retângulos, fazendo o mesmo com o quadrado, que resultaria em dois isósceles retângulos ou 8 escalenos retângulos, porém de formato diferente dos resultantes da divisão dos triângulos equiláteros.



Se fôssemos aceitar, porém, alguma possibilidade de aproximar esses triângulos distintos, admitindo movimentos de ajustes nos vértices, teríamos que admitir também a possibilidade de transformações não só entre os 4 elementos físicos, mas também com o quinto, o que era inadmissível para Platão, visto que considerava o mundo das Ideias Imateriais como essencialmente distinto do mundo físico.

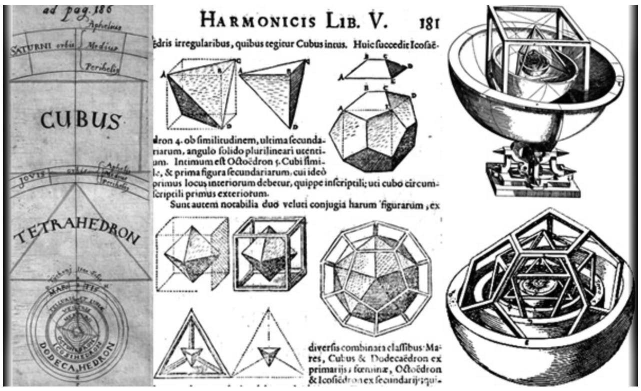
Assim, parece mais aceitável admitir que a TERRA permanece isolada do grupo das transformações dos demais elementos, embora seja claramente material, e estivesse presente no Caos original do qual o Demiurgo Divino moldou o mundo.

A Astrologia durante milênios foi a Astronomia, e durante muito tempo noções pitagóricas, platônicas e aristotélicas imperaram no imaginário dos cosmólogos. Os antigos gregos consideravam a existência de 7 planetas, incluindo o Sol e a Lua, mais os planetas visíveis Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno. Os orientais, por sua vez, consideravam apenas os 5 planetas normais, sem contar o Sol e Lua.

O sistema geocêntrico que perdurou até o século XVI fora inicialmente desenvolvido por Aristóteles e aperfeiçoado por Ptolomeu (83-168 dEC), reinando invicto até que finalmente viria entrar em choque com o sistema de Copérnico (1473-1543) e finalmente ser suplantado pelo sistema de Kepler (1571-1630).

Johannes Kepler

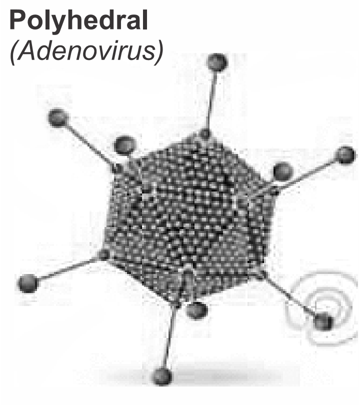
Curiosamente, uma parte importante do desenvolvimento do sistema kepleriano foi baseada nos Poliedros Regulares, ao achar que as distâncias das órbitas dos planetas deviam obedecer alguma ordem harmônica.



Inicialmente Kepler tentou encaixar as órbitas planetárias em círculos que circunscreviam polígonos regulares, depois percebeu que deveria fazê-lo com poliedros, e surpreendentemente conseguiu! Embora num grau de imprecisão que muito posteriormente viria a corrigir, até finalmente dar forma ao sistema de órbitas elípticas que conhecemos hoje.

QUESTÃO 01 – UFJF 2017

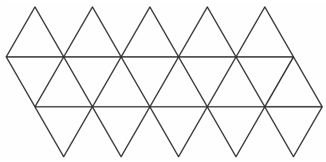
Observe, abaixo, uma imagem desse vírus que tem a forma de um sólido geométrico.



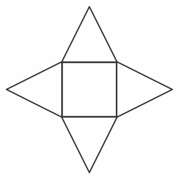
Disponível em: <http://www.thinkstockphotos.com/image/stockillustration-shapes-of-viruses/507687357>. Acesso em: 14 set. 2016.

Qual é a planificação do sólido representado por esse vírus?

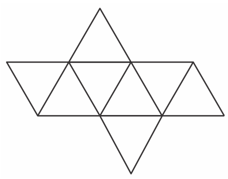
A



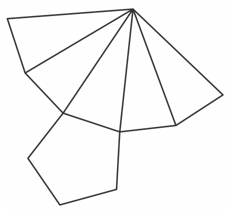
B



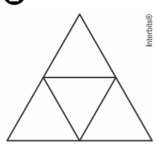
C



D

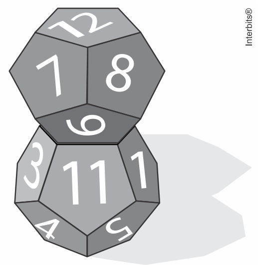


E



QUESTÃO 02 – UERJ 2016

Dois dados, com doze faces pentagonais cada um, têm a forma de dodecaedros regulares. Se os dodecaedros estão justapostos por uma de suas faces, que coincidem perfeitamente, formam um poliedro côncavo, conforme ilustra a figura.

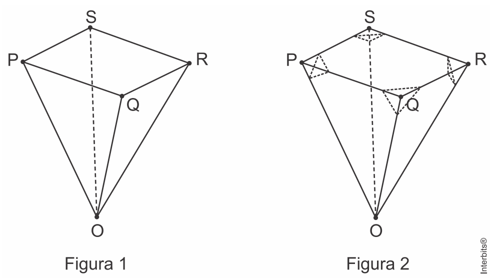


Considere o número de vértices V, de faces F e de arestas A desse poliedro côncavo.

A soma $V+F+A$ é igual a:
Ⓐ 102
Ⓑ 106
Ⓒ 110
Ⓓ 112

QUESTÃO 03 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2016

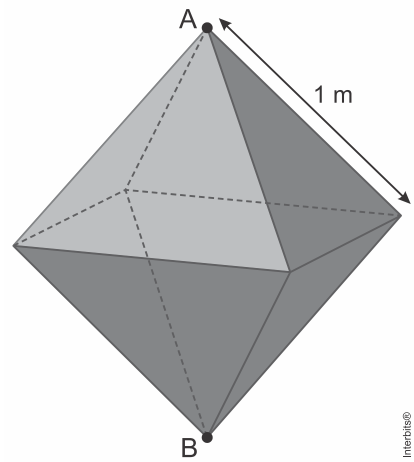
Um lapidador recebeu de um joalheiro a encomenda para trabalhar em uma pedra preciosa cujo formato é o de uma pirâmide, conforme ilustra a Figura 1. Para tanto, o lapidador fará quatro cortes de formatos iguais nos cantos da base. Os cantos retirados correspondem a pequenas pirâmides, nos vértices P, Q, R e S, ao longo dos segmentos tracejados, ilustrados na Figura 2.



Depois de efetuados os cortes, o lapidador obteve, a partir da pedra maior, uma joia poliédrica cujos números de faces, arestas e vértices são, respectivamente, iguais a
Ⓐ $9, 20$ e $13.$
Ⓑ $3, 24$ e $13.$
Ⓒ $7, 15$ e $12.$
Ⓓ $10, 16$ e $5.$
Ⓔ $11, 16$ e $5.$

QUESTÃO 04 – FMP 2016

A Figura mostra uma peça metálica que tem a forma de um octaedro regular, cujas arestas medem 1 metro.



A medida da distância entre os vértices A e B, em metros, é
Ⓐ 1
Ⓑ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
Ⓒ 2
Ⓓ $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
Ⓔ $\sqrt{2}$

QUESTÃO 05 – ENEM 2015

Para o modelo de um troféu foi escolhido um poliedro P, obtido a partir de cortes nos vértices de um cubo. Com um corte plano em cada um dos cantos do cubo, retira-se o canto, que é um tetraedro de arestas menores do que metade da aresta do cubo. Cada face do poliedro P, então, é pintada usando uma cor distinta das demais faces.

Com base nas informações, qual é a quantidade de cores que serão utilizadas na pintura das faces do troféu?
Ⓐ 6
Ⓑ 8
Ⓒ 14
Ⓓ 24
Ⓔ 30

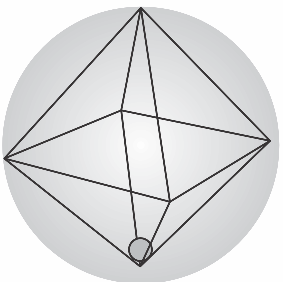
QUESTÃO 06 – UEL 2015

Originalmente os dados eram feitos de osso, marfim ou argila. Há evidências da existência deles no Paquistão, Afeganistão e noroeste da Índia, datando de 3500 a.C. Os dados cúbicos de argila continham de 1 a 6 pontos, dispostos de tal maneira que a soma dos pontos de cada par de faces opostas é sete.

Adaptado de: *Museu Arqueológico do Red Fort.* Delhi, India.

Atualmente, além dos dados em forma de cubo (hexaedro), encontram-se dados em vários formatos, inclusive esféricos, como mostram as figuras a seguir.

Apesar do formato esférico, ao ser lançado, o dado mostra pontos de um a seis, como se fosse um dado cúbico. Isso acontece porque no interior da esfera existe uma cavidade em forma de octaedro, na qual existe um peso (um chumbinho) que se aloja em um dos vértices do octaedro.



Assinale a alternativa que apresenta, corretamente, a propriedade dos poliedros regulares que justifica o fato de a cavidade no interior da esfera ser octaédrica.

Ⓐ O número de vértices do octaedro é igual ao número de faces do hexaedro.

Ⓑ O número de vértices do octaedro é diferente do número de faces do hexaedro.

Ⓒ O número de arestas do octaedro é igual ao número de arestas do hexaedro.

Ⓓ O número de faces do octaedro é igual ao número de vértices do hexaedro.

Ⓔ O número de faces do octaedro é diferente do número de vértices do hexaedro.

QUESTÃO 07 – UEMA 2015

A bola de futebol evoluiu ao longo do tempo e, atualmente, é um icosaedro truncado, formado por 32 peças, denominadas de gomos e, geometricamente, de faces. Nessa bola, 12 faces são pentágonos regulares, e as outras, hexágonos, também regulares. Os lados dos pentágonos e dos hexágonos são iguais e costurados. Ao unirem-se os dois lados costurados das faces, formam-se as arestas. O encontro das arestas forma os vértices. Quando cheio, o poliedro é similar a uma esfera.

O número de arestas e o número de vértices existentes nessa bola de futebol são, respectivamente,

Ⓐ 80 e 60

Ⓑ 80 e 50

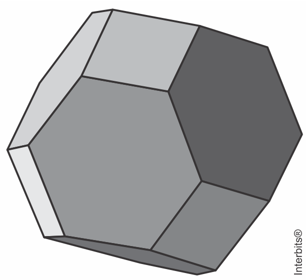
Ⓒ 70 e 40

Ⓓ 90 e 60

Ⓔ 90 e 50

QUESTÃO 08 – UFPF 2015

O poliedro representado na figura (octaedro truncado) é construído a partir de um octaedro regular, cortando-se, para tal, em cada vértice, uma pirâmide regular de base quadrangular.



A soma dos ângulos internos de todas as faces do octaedro truncado é:

Ⓐ 2160°

Ⓑ 5760°

Ⓒ 7920°

Ⓓ 10080°

Ⓔ 13680°

QUESTÃO 09 – UECE 2014

Um poliedro convexo tem 32 faces, sendo 20 hexágonos e 12 pentágonos.

O número de vértices deste polígono

- Ⓐ 90.
- Ⓑ 72.
- Ⓒ 60.
- Ⓓ 56.

QUESTÃO 10 – IFSP 2013

A figura mostra uma peça feita em 1587 por Stefano Buonsignori, e está exposta no Museu Galileo, em Florença, na Itália. Esse instrumento tem a forma de um dodecaedro regular e, em cada uma de suas faces pentagonais, há a gravação de um tipo diferente de relógio.

(www.europeana.eu/portal/record/02301/09A148 E006A2F3B5A6E202BB5B4F79735A2D2B6C.html - Acesso em 15.10.2012. Adaptado)

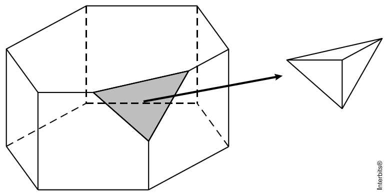
Em 1758, o matemático Leonard Euler (1707-1783) descobriu o teorema conhecido por relação de Euler: em todo poliedro convexo com V vértices, A arestas e F faces, vale a relação $V - A + F = 2$.

Ao se aplicar a relação de Euler no poliedro da figura, o número de arestas não visíveis é

- Ⓐ 10.
- Ⓑ 12.
- Ⓒ 15.
- Ⓓ 16.
- Ⓔ 18.

QUESTÃO 11 – INSPER 2012

De cada vértice de um prisma hexagonal regular foi retirado um tetraedro, como exemplificado para um dos vértices do prisma desenhado a seguir.



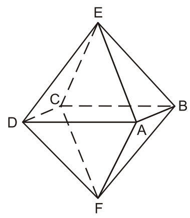
O plano que definiu cada corte feito para retirar os tetraedros passa pelos pontos médios das três arestas que concorrem num mesmo vértice do prisma.

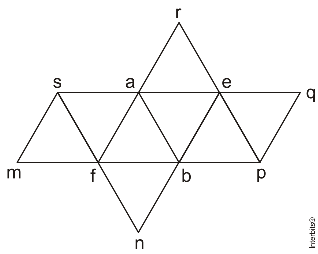
O número de faces do poliedro obtido depois de terem sido retirados todos os tetraedros é

- Ⓐ 24.
- Ⓑ 20.
- Ⓒ 18.
- Ⓓ 16.
- Ⓔ 12.

QUESTÃO 12 – UFRGS 2008

As figuras a seguir representam um octaedro regular e uma de suas planificações.





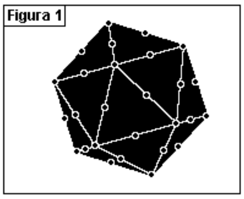
Aos vértices A, B, E, F do octaedro correspondem, respectivamente, os pontos a, b, e, f da planificação.

Ao vértice D do octaedro correspondem, na planificação, os pontos

- Ⓐ m, n, p.
- Ⓑ n, p, q.
- Ⓒ p, q, r.
- Ⓓ q, r, s.
- Ⓔ r, s, m.

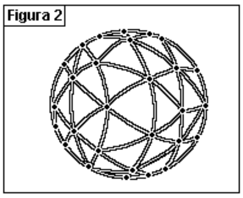
QUESTÃO 13 – UERJ 2008

Considere o icosaedro a seguir (figura 1), construído em plástico inflável, cujos vértices e pontos médios de todas as arestas estão marcados.

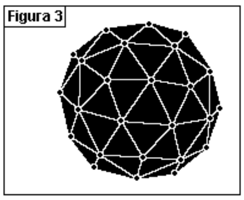


A partir dos pontos médios, quatro triângulos equiláteros congruentes foram formados em cada face do icosaedro.

Admita que o icosaedro é inflado até que todos os pontos marcados fiquem sobre a superfície de uma esfera, e os lados dos triângulos tornem-se arcos de circunferências, como ilustrado na figura 2.



Observe agora que, substituindo-se esses arcos por segmentos de reta, obtém-se uma nova estrutura poliédrica de faces triangulares, denominada geodésica. (Figura 3)

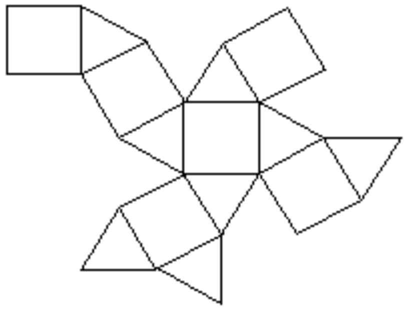


O número de arestas dessa estrutura é igual a:

Ⓐ 90
Ⓑ 120
Ⓒ 150
Ⓓ 180

QUESTÃO 14 – UFJF 2007

A figura a seguir representa a planificação de um poliedro convexo.



O número de vértices deste poliedro é:

Ⓐ 12.
Ⓑ 14.
Ⓒ 16.
Ⓓ 20.
Ⓔ 22.

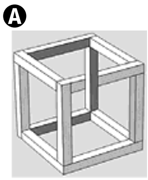
QUESTÃO 15 – ENEM 2007

Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida a seguir.

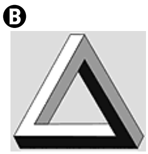
Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho.

Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

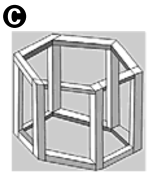
(A)



(B)

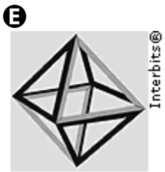


(C)



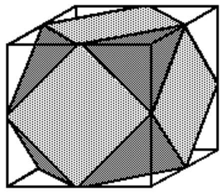
(D)

(E)



QUESTÃO 16 – UNIFESP 2005

Considere o poliedro cujos vértices são os pontos médios das arestas de um cubo.



O número de faces triangulares e o número de faces quadradas desse poliedro são, respectivamente:

(A) 8 e 8
(B) 8 e 6
(C) 6 e 8
(D) 8 e 4
(E) 6 e 6

QUESTÃO 17 – PUCPR 2005

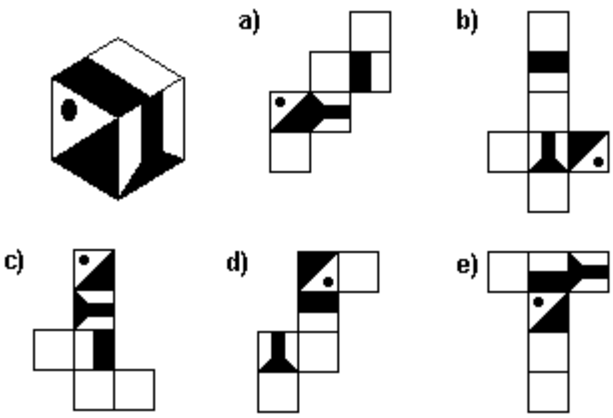
O tetra-hexaedro é um sólido convexo limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares.

O número de arestas e vértices desse sólido é:

(A) A = 21 V = 13
(B) A = 24 V = 16
(C) A = 48 V = 40
(D) A = 32 V = 24
(E) A = 34 V = 24

QUESTÃO 18 – UEL 2001

Em qual das alternativas está a planificação do cubo representado à esquerda?



QUESTÃO 19 – UFC 2000

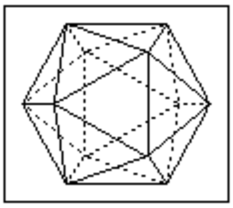
Um poliedro convexo de nove vértices possui quatro ângulos triédricos e cinco ângulos tetraédricos.

Então o número de faces deste poliedro é:

Ⓐ 12
Ⓑ 11
Ⓒ 10
Ⓓ 9
Ⓔ 8

QUESTÃO 20 – UERJ 1999

Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a 1/3 da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro usado na fabricação de bolas. Observe as figuras.



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha.

Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

Ⓐ 7,0 m
Ⓑ 6,3 m
Ⓒ 4,9 m
Ⓓ 2,1 m

QUESTÃO 21 – UNIRIO 1997

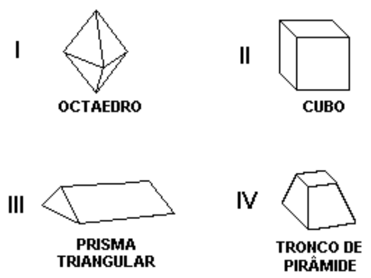
Um geólogo encontrou, numa de suas explorações, um cristal de rocha no formato de um poliedro, que satisfaz a relação de Euler, de 60 faces triangulares.

O número de vértices deste cristal é igual a:

Ⓐ 35
Ⓑ 34
Ⓒ 33
Ⓓ 32
Ⓔ 31

QUESTÃO 22 – UNITAU 1995

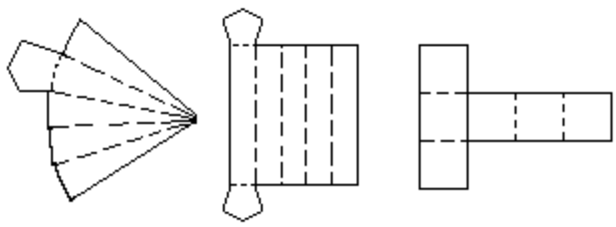
Indique quantas faces possuem, respectivamente, nessa ordem, os sólidos numerados como I, II, III e IV a seguir:



Ⓐ 8, 6, 5, 6.
Ⓑ 8, 6, 6, 5.
Ⓒ 8, 5, 6, 6.
Ⓓ 5, 8, 6, 6.
Ⓔ 6, 18, 6, 5.

QUESTÃO 23 – UNITAU 1995

Se dobrarmos convenientemente as linhas tracejadas das figuras a seguir, obteremos três modelos de figuras espaciais cujos nomes são:



Ⓐ tetraedro, octaedro e hexaedro.
Ⓑ paralelepípedo, tetraedro e octaedro.
Ⓒ octaedro, prisma e hexaedro.
Ⓓ pirâmide, tetraedro e hexaedro.
Ⓔ pirâmide pentagonal, prisma pentagonal e hexaedro.

QUESTÃO 24 – CESGRANRIO 1992

Um poliedro convexo é formado por 4 faces triangulares, 2 faces quadrangulares e 1 face hexagonal.

O número de vértices desse poliedro é de:

Ⓐ 6
Ⓑ 7
Ⓒ 8
Ⓓ 9
Ⓔ 10

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	A
02	D
03	A
04	E
05	C
06	A
07	D
08	C
09	C
10	A
11	B
12	D
13	B
14	A
15	E
16	B
17	B
18	D
19	D
20	B
21	D
22	A
23	E
24	C

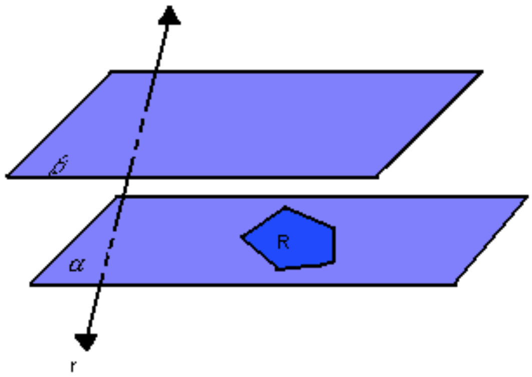
GEOMETRIA ESPACIAL

PRISMAS

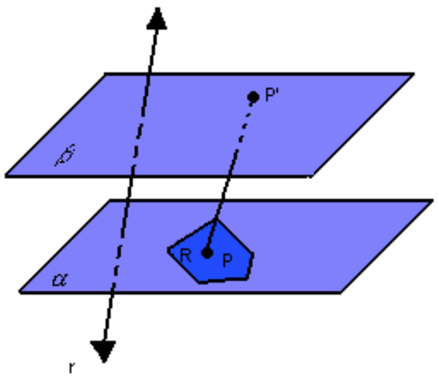
ANDERSON
MATEMÁTICA

PRISMAS

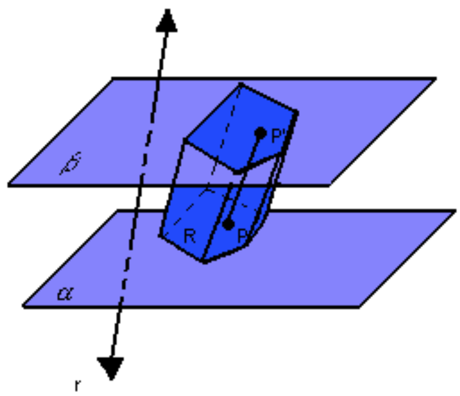
Na figura abaixo, temos dois planos paralelos e distintos, α e β, um polígono convexo R contido em α e uma reta r que intercepta α e β, mas não R:



Para cada ponto P da região R, vamos considerar o segmento $\overline{PP'}$ paralelo à reta r, $(P' \in \beta)$:



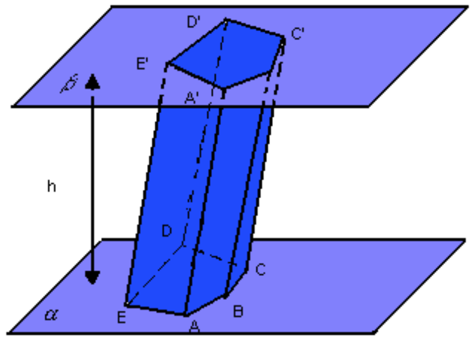
Assim, temos:



Chamamos de prisma, o conjunto de todos os segmentos congruentes $\overline{PP'}$ paralelos a r.

ELEMENTOS DO PRISMA

Dado o prisma a seguir:



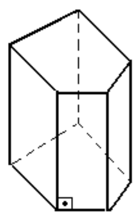
Considere os seguintes elementos:

- **Bases:** os polígonos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$;
- **Altura:** a distância h entre os planos α e β;
- **Arestas da base:** os lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EA}$ do polígono $ABCDE$ e os lados $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, $\overline{D'E'}$ e $\overline{E'A'}$ do polígono $A'B'C'D'E'$;
- **Arestas laterais:** os segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{DD'}$ e $\overline{EE'}$;
- **Faces laterais:** os paralelogramos $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, $DD'E'E$ e $EE'A'A$.

CLASSIFICAÇÃO

Um prisma poder ser:

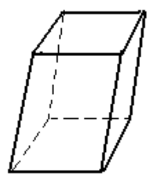
- **Reto:**



prisma reto

Quando as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

- **Oblíquo:**

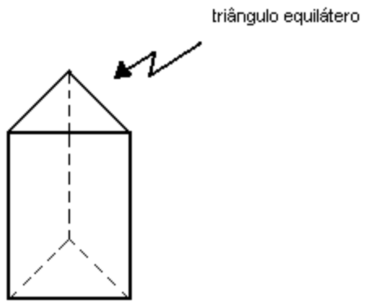


prisma oblíquo

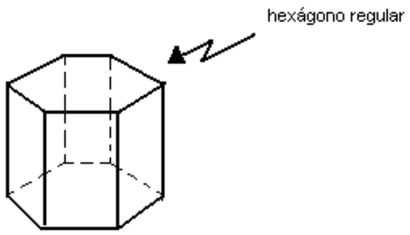
Quando as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

- **Regular:**

Chamamos de prisma regular todo prisma reto cujas bases são polígonos regulares.



prisma regular triangular



prisma regular hexagonal

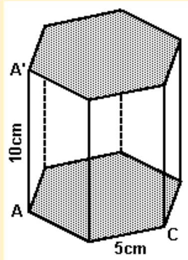
As faces laterais de um prisma regular são retângulos congruentes.

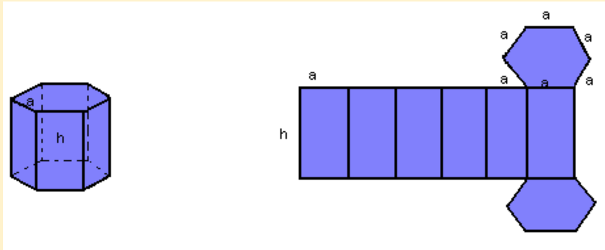
ÁREAS

Num prisma, distinguimos dois tipos de superfície, as faces laterais e as bases. Assim, temos que considerar as seguintes áreas:

- **Área de uma face lateral** A_f**:** área de um dos paralelogramos que constituem as faces. (Se o prisma for reto, as faces laterais são retângulos, se o prisma for regular, as faces laterais são retângulos congruentes);
- **Área lateral** A_l**:** soma das áreas de todos os paralelogramos que formam as faces laterais de um prisma. (Se o prisma for reto, as faces laterais são retângulos, se o prisma for regular, as faces laterais são retângulos congruentes);
- **Área da base** A_b**:** área de um dos polígonos da base;
- **Área total** A_t**:** soma da área lateral com duas vezes a área da base, $A_t = A_l + 2A_b$.

Exemplo:
Dado um prisma hexagonal regular de aresta da base **a = 5cm** e altura/aresta lateral **h = 10cm**, temos:





Área de uma face lateral

$$A_f = ah$$

$$A_f = 5 \cdot 10 = 50cm^2$$

Área lateral

$$A_l = 6ah$$

$$A_l = 6 \cdot 5 \cdot 10 = 300cm^2$$

Área da base

$$A_b = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_b = \frac{3 \cdot 5^2\sqrt{3}}{2} = \frac{75\sqrt{3}}{2}cm^2$$

Área total

$$A_t = A_l + 2A_b$$

$$A_t = 6ah + 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$A_t = 6ah + 3a^2\sqrt{3}$$

$$A_t = a\left(6h + 3a\sqrt{3}\right)$$

$$A_t = 5\left(60 + 15\sqrt{3}\right)$$

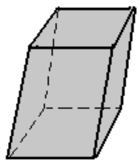
$$A_t = 75\left(4 + \sqrt{3}\right)cm^2$$

Vamos falar um pouco mais sobre alguns prismas especiais que aparecem com maior frequência na prova do ENEM.

PARALELEPÍPEDO

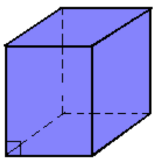
Todo prisma cujas bases são paralelogramos recebe o nome de paralelepípedo. Assim, podemos ter:

- **Paralelepípedo Oblíquo:**



As bases são paralelogramos e as arestas laterais são oblíquas aos planos das bases.

- **Paralelepípedo Retorretângulo:**

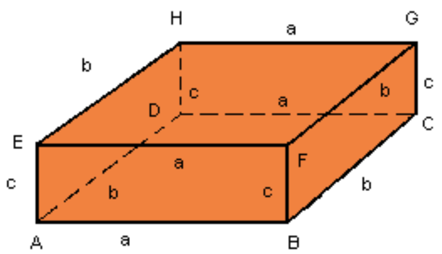


As bases são retângulos e as arestas laterais são perpendiculares aos planos das bases.

Sem dúvidas este é o prisma que mais aparece nas questões do ENEM, por isso, iremos nos aprofundar um pouco mais.

PARALELEPÍPEDO RETORRETÂNGULO

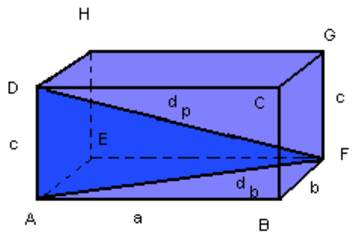
O paralelepípedo a seguir possui quatro arestas paralelas entre si de medidas iguais a **a**, quatro arestas paralelas entre si de medidas iguais a **b**, e quatro arestas paralelas entre si de medidas iguais a **c**.



Comumente dizemos que **a**, **b** e **c** são, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura do paralelepípedo retorretângulo.

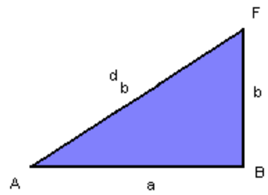
DIAGONAIS

Considere a figura a seguir:



d_b é a diagonal da base do paralelepípedo
d_p é a diagonal do paralelepípedo

Na base $ABFE$, temos:



$$d_b{}^2 = a^2 + b^2$$

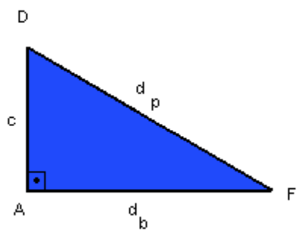
$$d_b = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Caso queiramos encontrar as diagonais das outras faces, basta utilizarmos os lados da face correspondente no cálculo da diagonal.

$d_{f1} = \sqrt{a^2 + c^2}$, essa é a diagonal da face cujos lados medem a e c.

$d_{f2} = \sqrt{b^2 + c^2}$, essa é a diagonal da face cujos lados medem b e c.

No triângulo AFD, temos:



$$d_p{}^2 = d_b{}^2 + c^2$$

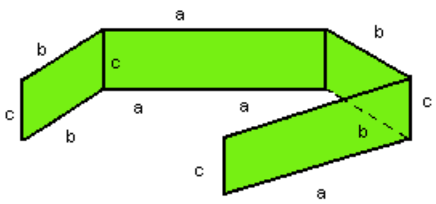
Porém, $d_b{}^2 = a^2 + b^2$, substituindo, temos:

$$d_p{}^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d_p = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

ÁREA LATERAL

Sendo A_l a área lateral de um paralelepípedo retorretângulo, temos:

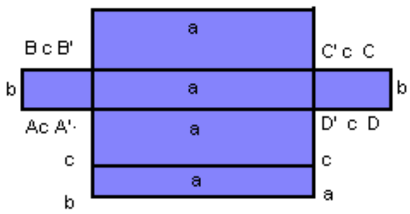


$$A_l = ac + bc + ac + bc$$

$$A_l = 2(ac + bc)$$

ÁREA TOTAL

Planificando o paralelepípedo, verificamos que a área total é a soma das áreas de cada par de faces opostas:

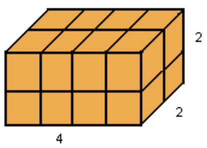


$$A_t = 2(ab + bc + ac)$$

VOLUME

Por definição, a unidade de volume é um cubo de aresta 1. Assim, considerando um paralelepípedo de dimensões a, b e c, podemos decompô-lo em a cubinhos no seu comprimento, b cubinhos na largura e c cubinhos na altura.

Tome como exemplo um paralelepípedo de dimensões 4cm, 2cm e 2cm. Conseguimos 4 cubinhos de 1cm no comprimento, 2 cubinhos de 1cm na largura e 2 cubinhos de 1cm na altura.

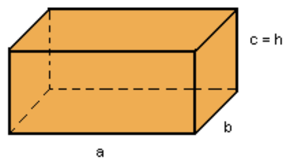


O volume do paralelepípedo é a quantidade de cubinhos que podemos decompô-lo. Que nesse caso é 4.2.2 = 16 cubinhos. Equivalendo a $16cm^3$.

Em geral, o volume é dado pelo produto das três dimensões:

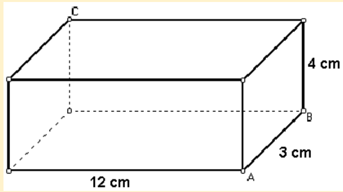
$$V = a \cdot b \cdot c$$

No entanto, o produto de duas dimensões de um paralelepípedo coincide com a área de uma face e como qualquer face pode ser considerada base, o volume pode ser dado pelo produto da área da base pela altura.



$$V = A_b \cdot h$$

Exemplo 01:
Dado o paralelepípedo de comprimento 12cm, largura 3cm e altura 4cm, calcule:



a) A diagonal da face que tem largura 3cm e altura 4cm.

b) A diagonal da face que tem comprimento 12cm e altura 4cm.

c) A diagonal da face, que tem comprimento 12cm e largura 3cm.

d) A diagonal do paralelepípedo.

e) A área lateral do paralelepípedo.

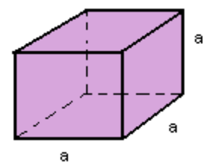
f) A área da base do paralelepípedo.

g) A área total do paralelepípedo.

h) O volume do paralelepípedo.

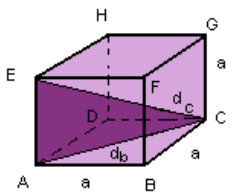
CUBO

Um paralelepípedo retângulo com todas as arestas congruentes ($a = b = c$) recebe o nome de cubo. Dessa forma, as seis faces são quadrados.



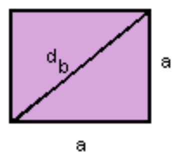
DIAGONAIS

Considere a figura a seguir:



d_b é a diagonal da base do cubo
d_p é a diagonal do cubo

Na base $ABCD$, temos:



$$d_b{}^2 = a^2 + a^2$$

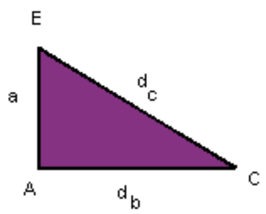
$$d_b{}^2 = 2a^2$$

$$d_b = \sqrt{2a^2}$$

$$d_b = a\sqrt{2}$$

Como todas as faces são iguais, qualquer diagonal pertencente a uma face pode ser calculada por $d_f = a\sqrt{2}$.

No triângulo ACE, temos:



$$d_p{}^2 = d_b{}^2 + a^2$$

Porém, $d_b{}^2 = 2a^2$, substituindo, temos:

$$d_p{}^2 = 2a^2 + a^2$$

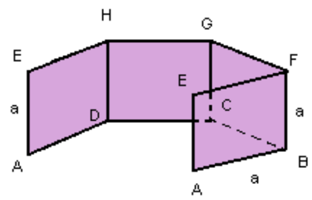
$$d_p{}^2 = 3a^2$$

$$d_p = \sqrt{3a^2}$$

$$d_p = a\sqrt{3}$$

ÁREA LATERAL

A área lateral A_l é dada pela soma das áreas dos quatro quadrados que compõem a lateral do cubo:



$$A_l = 4a^2$$

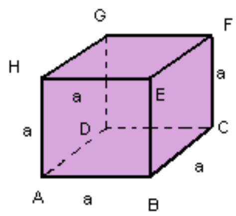
ÁREA DA BASE

A área da base é dada pela área do quadrado que compõe a base.

$$A_b = a^2$$

ÁREA TOTAL

A área total é dada pela área dos seis quadrados (quatro na lateral e dois nas bases) que compõem o cubo.



$$A_t = 6a^2$$

VOLUME

De forma semelhante ao paralelepípedo retorretângulo, o volume é dado pelo produto das três dimensões:

$$V = a \cdot a \cdot a$$

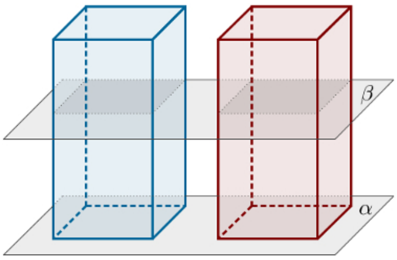
$$V = a^3$$

GENERALIZAÇÃO DO VOLUME DE UM PRISMA

O PRINCÍPIO DE CAVALIERI

Cavalieri era um matemático do século XVII que teve a seguinte ideia: embora o formato de um sólido geométrico seja modificado, exceto por casos em que ele perde ou ganha massa, seu volume permanecerá inalterado. Esse é o pensamento que fundamenta o princípio, que ainda será definido adiante.

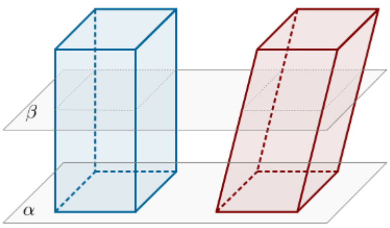
Vejamos o que acontece com dois prismas distintos que possuem o mesmo volume quando deformamos um deles. Primeiramente, colocaremos os dois prismas de mesmo volume sobre um mesmo plano α.



Dois prismas distintos que possuem área da base e altura congruentes

Os dois prismas acima foram colocados sobre o plano α e possuem área da base e altura congruentes. Pode-se dizer que os prismas são congruentes porque possuem medidas iguais e também que são equivalentes porque possuem volumes iguais.Note que fizemos um corte nesses prismas por meio do plano β. As figuras formadas no corte, destacadas pelas linhas pontilhadas, são congruentes às bases de seus respectivos prismas.

Cavalieri observou que, deformando um dos dois prismas sem modificar o formato de suas bases ou sua altura, eles continuam com volumes iguais.



O segundo prisma sofreu uma deformação, mas manteve a base quadrada congruente à do primeiro

Na imagem acima, note que o segundo prisma foi deformado, como se sua base estivesse fixa ao plano α e seu topo tivesse sido empurrado para a direita. Isso não modificou o formato de sua base, que permanece quadrada e congruente à do outro prisma, nem sua altura.

Note também que o corte realizado pelo plano β ainda gera um quadrado no prisma da direita congruente ao quadrado do prisma da esquerda.

Dessa maneira, Cavalieri propôs que, independentemente da altura em que esse corte é feito, o formato da figura obtida no segundo prisma é igual ao da primeira e elas são congruentes. Dessa maneira, como os dois prismas possuem a mesma altura, continuam equivalentes (com volumes iguais).

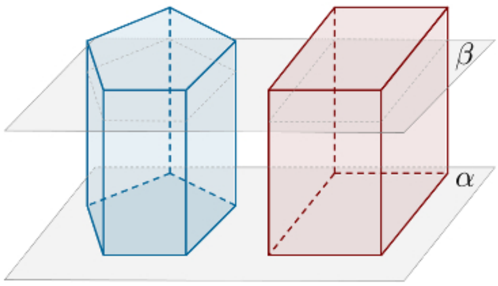
Daí segue que o volume de um prisma (reto ou oblíquo) é o produto da área da base pela altura.

$$V = A_b \cdot h$$

FORMALIZAÇÃO

Dados dois sólidos geométricos A e B de mesma altura e mesma áreas das bases, que, por sua vez, estão contidas no mesmo plano α. Os sólidos A e B têm o mesmo volume se qualquer plano β, paralelo a α, determinar duas secções transversais com áreas iguais.

Dessa maneira, o princípio de Cavalieri pode ser usado também para sólidos completamente diferentes, mas que possuem mesma altura, bases com áreas iguais e que qualquer corte realizado nos dois por um mesmo plano resulte em figuras com áreas iguais. Observe o exemplo abaixo:



Os prismas possuem bases diferentes, mas se a área de qualquer secção transversal feita no primeiro for igual à sua respectiva secção no segundo e, além disso, suas alturas forem iguais, então os seus volumes também serão.

Sendo assim, o volume de qualquer prisma será dado por:

$$V = A_b \cdot h$$

Em que A_b é a área da base do prisma e h é a distância entre os dois planos que contém as bases, ou seja, a altura do prism.

QUESTÃO 01 – ENEM 2016 2ª APLICAÇÃO

O recinto das provas de natação olímpica utiliza a mais avançada tecnologia para proporcionar aos nadadores condições ideais. Isso passa por reduzir o impacto da ondulação e das correntes provocadas pelos nadadores no seu deslocamento. Para conseguir isso, a piscina de competição tem uma profundidade uniforme de 3 m, que ajuda a diminuir a "reflexão" da água (o movimento) contra uma superfície e o regresso no sentido contrário, atingindo os nadadores), além dos já tradicionais 50 m de comprimento e 25 m de largura. Um clube deseja reformar sua piscina de 50 m de comprimento, 20 m de largura e 2 m de profundidade de forma que passe a ter as mesmas dimensões das piscinas olímpicas.

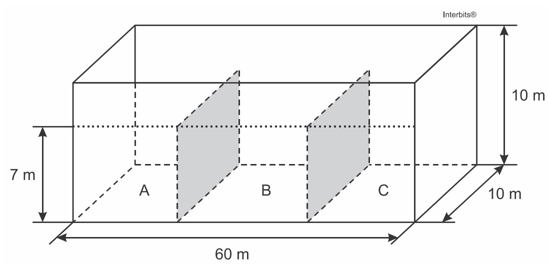
Disponível em: http://desporto.publico.pt. Acesso em: 6 ago. 2012.

Após a reforma, a capacidade dessa piscina superará a capacidade da piscina original em um valor mais próximo de

A) 20%
B) 25%
C) 47%
D) 50%
E) 88%

QUESTÃO 02 – ENEM 2016

Um petroleiro possui reservatório em formato de um paralelepípedo retangular com as dimensões dadas por $60\text{ m} \times 10\text{ m}$ de base e 10 m de altura. Com o objetivo de minimizar o impacto ambiental de um eventual vazamento, esse reservatório é subdividido em três compartimentos, A, B e C, de mesmo volume, por duas placas de aço retangulares com dimensões de 7 m de altura e 10 m de base, de modo que os compartimentos são interligados, conforme a figura. Assim, caso haja rompimento no casco do reservatório, apenas uma parte de sua carga vazará.



Suponha que ocorra um desastre quando o petroleiro se encontra com sua carga máxima: ele sofre um acidente que ocasiona um furo no fundo do compartimento C.

Para fins de cálculo, considere desprezíveis as espessuras das placas divisórias.

Após o fim do vazamento, o volume de petróleo derramado terá sido de

A) $1{,}4 \times 10^3\text{ m}^3$
B) $1{,}8 \times 10^3\text{ m}^3$
C) $2{,}0 \times 10^3\text{ m}^3$
D) $3{,}2 \times 10^3\text{ m}^3$
E) $6{,}0 \times 10^3\text{ m}^3$

QUESTÃO 03 – ENEM 2015

Uma fábrica de sorvetes utiliza embalagens plásticas no formato de paralelepípedo retangular reto. Internamente, a embalagem tem 10 cm de altura e base de 20 cm por 10 cm. No processo de confecção do sorvete, uma mistura é colocada na embalagem no estado líquido e, quando levada ao congelador, tem seu volume aumentado em 25%, ficando com consistência cremosa. Inicialmente é colocada na embalagem uma mistura sabor chocolate com volume de 1.000 cm^3 e, após essa mistura ficar cremosa, será adicionada uma mistura sabor morango, de modo que, ao final do processo de congelamento, a embalagem fique completamente preenchida com sorvete, sem transbordar.

O volume máximo, em cm^3, da mistura sabor morango que deverá ser colocado na embalagem é

A) 450.
B) 500.
C) 600.
D) 750.
E) 1.000.

QUESTÃO 04 – ENEM PPL 2015

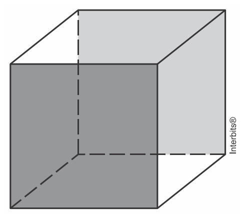
Uma fábrica que trabalha com matéria-prima de fibra de vidro possui diversos modelos e tamanhos de caixa-d'água. Um desses modelos é um prisma reto com base quadrada. Com o objetivo de modificar a capacidade de armazenamento de água, está sendo construído um novo modelo, com as medidas das arestas da base duplicadas, sem a alteração da altura, mantendo a mesma forma.

Em relação ao antigo modelo, o volume do novo modelo é

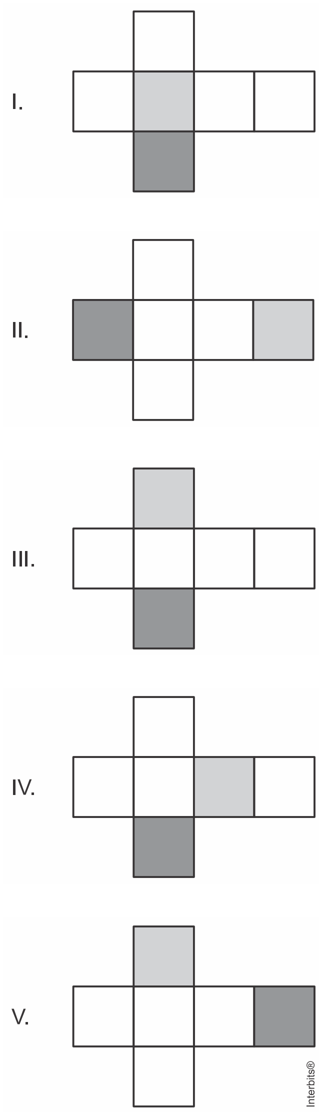
A) oito vezes maior.
B) quatro vezes maior.
C) duas vezes maior.
D) a metade.
E) a quarta parte.

QUESTÃO 05 – ENEM PPL 2015

Uma empresa que embala seus produtos em caixas de papelão, na forma de hexaedro regular, deseja que seu logotipo seja impresso nas faces opostas pintadas de cinza, conforme a figura:



A gráfica que fará as impressões dos logotipos apresentou as seguintes sugestões planificadas:



Que opção sugerida pela gráfica atende ao desejo da empresa?

- Ⓐ I
- Ⓑ II
- Ⓒ III
- Ⓓ IV
- Ⓔ V

QUESTÃO 06 – ENEM PPL 2015

Em uma confeitaria, um cliente comprou um *cupcake* (pequeno bolo no formato de um tronco de cone regular mais uma cobertura, geralmente composta por um creme), semelhante ao apresentado na figura:

Como o bolinho não seria consumido no estabelecimento, o vendedor verificou que as caixas disponíveis para embalar o doce eram todas em formato de blocos retangulares, cujas medidas estão apresentadas no quadro:

Embalagem	Dimensões (comprimento×largura×altura)
I	$8{,}5\text{ cm}\times 12{,}2\text{ cm}\times 9{,}0\text{ cm}$
II	$10\text{ cm}\times 11\text{ cm}\times 15\text{ cm}$
III	$7{,}2\text{ cm}\times 8{,}2\text{ cm}\times 16\text{ cm}$
IV	$7{,}5\text{ cm}\times 7{,}8\text{ cm}\times 9{,}5\text{ cm}$
V	$15\text{ cm}\times 8\text{ cm}\times 9\text{ cm}$

A embalagem mais apropriada para armazenar o doce, de forma a não o deformar e com menor desperdício de espaço na caixa, é

- Ⓐ I.
- Ⓑ II.
- Ⓒ III.
- Ⓓ IV.
- Ⓔ V.

QUESTÃO 07 – ENEM PPL 2015

Uma empresa necessita colorir parte de suas embalagens, com formato de caixas cúbicas, para que possa colocar produtos diferentes em caixas distintas pela cor, utilizando para isso um recipiente com tinta, conforme Figura 1. Nesse recipiente, mergulhou-se um cubo branco, tal como se ilustra na Figura 2. Desta forma, a parte do cubo que ficou submersa adquiriu a cor da tinta.

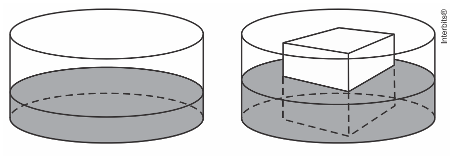
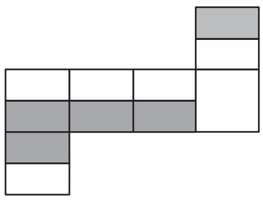


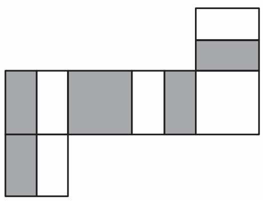
Figura 1 Figura 2

Qual é a planificação desse cubo após submerso?

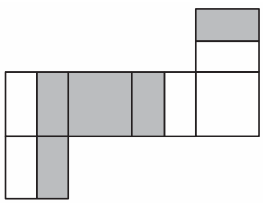
A



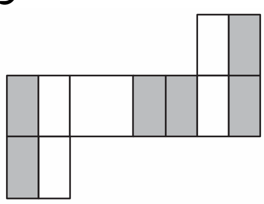
B



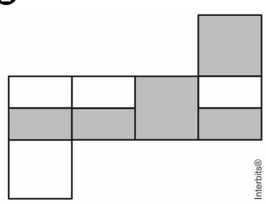
C



D

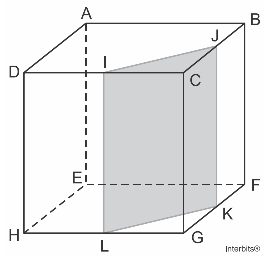


E



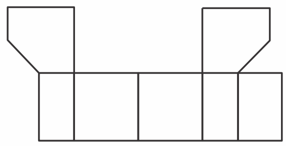
QUESTÃO 07 – ENEM PPL 2014

Corta-se um cubo ABCDEFGH por um plano ortogonal às faces ABCD e EFGH que contém os pontos médios I e J das arestas CD e BC e elimina-se, em seguida, o prisma IJCLKG, obtendo-se o prisma ABJIDEFKLH.

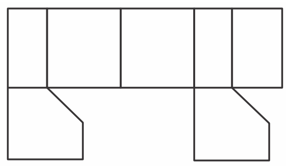


A planificação da superfície do prisma resultante ABJIDEFKLH corresponde à figura

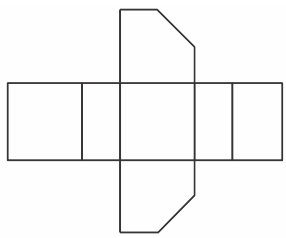
A



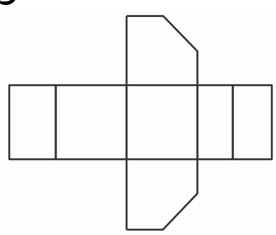
B



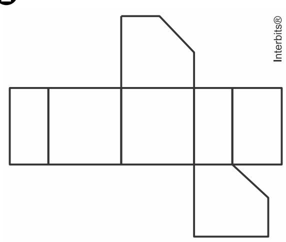
C



D

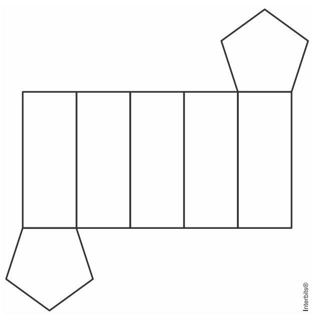


E



QUESTÃO 09 – ENEM PPL 2014

Um lojista adquiriu novas embalagens para presentes que serão distribuídas aos seus clientes. As embalagens foram entregues para serem montadas e têm forma dada pela figura.

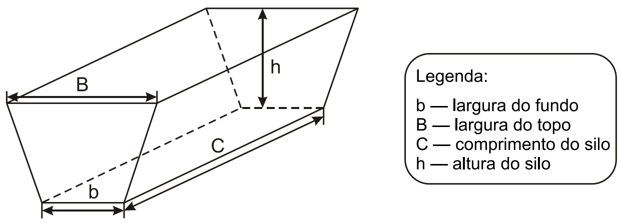


Após montadas, as embalagens formarão um sólido com quantas arestas?

Ⓐ 10
Ⓑ 12
Ⓒ 14
Ⓓ 15
Ⓔ 16

QUESTÃO 10 – ENEM 2014

Na alimentação de gado de corte, o processo de cortar a forragem, colocá-la no solo, compactá-la e protegê-la com uma vedação denomina-se silagem. Os silos mais comuns são os horizontais, cuja forma é a de um prisma reto trapezoidal, conforme mostrado na figura.



Considere um silo de 2m de altura, 6m de largura de topo e 20m de comprimento. Para cada metro de altura do silo, a largura do topo tem 0,5m a mais do que a largura do fundo. Após a silagem, 1 tonelada de forragem ocupa $2m^3$ desse tipo de silo.

EMBRAPA. *Gado de corte*. Disponível em: www.cnpgc.embrapa.br. Acesso em: 1 ago. 2012 (adaptado).

Após a silagem, a quantidade máxima de forragem que cabe no silo, em toneladas, é

Ⓐ 110.
Ⓑ 125.
Ⓒ 130.
Ⓓ 220.
Ⓔ 260.

QUESTÃO 11 – ENEM PPL 2014

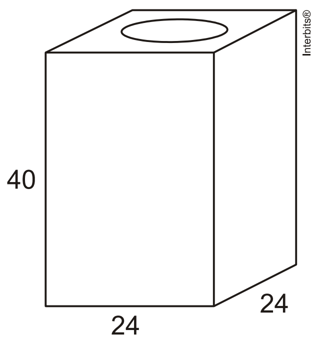
A caixa-d'água de uma casa tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e possui dimensões externas (comprimento, largura e altura), de, respectivamente, 4,0 m, 3,0 m e 2,5 m. É necessária a impermeabilização de todas as faces externas dessa caixa, incluindo a tampa. O fornecedor do impermeabilizante informou ao dono da casa que seu produto é fornecido em galões, de capacidade igual a 4,0 litros. Informou, ainda, que cada litro impermeabiliza uma área de $17.700\ cm^2$ e são necessárias 3 demãos de produto para garantir um bom resultado.

Com essas informações, para obter um bom resultado no trabalho de impermeabilização, o dono da casa precisará comprar um número mínimo de galões para a execução desse serviço igual a

Ⓐ 9.
Ⓑ 13.
Ⓒ 19.
Ⓓ 25.
Ⓔ 45.

QUESTÃO 12 – ENEM 2014

Uma lata de tinta, com a forma de um paralelepípedo retangular reto, tem as dimensões, em centímetros, mostradas na figura.



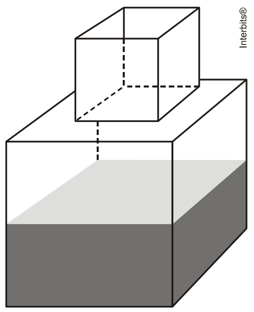
Será produzida uma nova lata, com os mesmos formato e volume, de tal modo que as dimensões de sua base sejam 25% maiores que as da lata atual.

Para obter a altura da nova lata, a altura da lata atual deve ser reduzida em

Ⓐ 14,4%
Ⓑ 20%
Ⓒ 32,0%
Ⓓ 36,0%
Ⓔ 64,0%

QUESTÃO 13 – ENEM 2014

Um fazendeiro tem um depósito para armazenar leite formado por duas partes cúbicas que se comunicam, como indicado na figura. A aresta da parte cúbica de baixo tem medida igual ao dobro da medida da aresta da parte cúbica de cima. A torneira utilizada para encher o depósito tem vazão constante e levou 8 minutos para encher metade da parte de baixo.

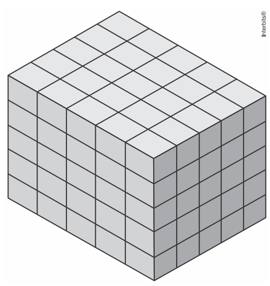


Quantos minutos essa torneira levará para encher completamente o restante do depósito?

Ⓐ 8.
Ⓑ 10.
Ⓒ 16.
Ⓓ 18.
Ⓔ 24.

QUESTÃO 14 – ENEM PPL 2014

Uma fábrica de rapadura vende seus produtos empacotados em uma caixa com as seguintes dimensões: 25 cm de comprimento; 10 cm de altura e 15 cm de profundidade. O lote mínimo de rapaduras vendido pela fábrica é um agrupamento de 125 caixas dispostas conforme a figura.



Qual é o volume do lote mínimo comercializado pela fábrica de rapaduras?

Ⓐ 3.750 cm^3
Ⓑ 18.750 cm^3
Ⓒ 93.750 cm^3
Ⓓ 468.750 cm^3
Ⓔ $2.343.750\text{ cm}^3$

QUESTÃO 15 – ENEM PPL 2014

Um agricultor possui em sua fazenda um silo para armazenar sua produção de milho. O silo, que na época da colheita é utilizado em sua capacidade máxima, tem a forma de um paralelepípedo retângulo reto, com os lados da base medindo L metros e altura igual a h metros. O agricultor deseja duplicar a sua produção para o próximo ano e, para isso, irá comprar um novo silo, no mesmo formato e com o dobro da capacidade do atual. O fornecedor de silos enviou uma lista com os tipos disponíveis e cujas dimensões são apresentadas na tabela:

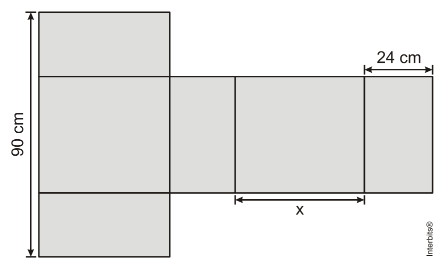
Tipo de silo	**Lado (em metros)**	**Altura (em metros)**
I	L	$2h$
II	$2L$	h
III	$2L$	$2h$
IV	$4L$	h
V	L	$4h$

Para atender às suas necessidades, o agricultor deverá escolher o silo de tipo

Ⓐ I.
Ⓑ II.
Ⓒ III.
Ⓓ IV.
Ⓔ V.

QUESTÃO 16 – ENEM 2014

Conforme regulamento da Agência Nacional de Aviação Civil (Anac), o passageiro que embarcar em voo doméstico poderá transportar bagagem de mão, contudo a soma das dimensões da bagagem (altura + comprimento + largura), não pode ser superior a 115cm.
A figura mostra a planificação de uma caixa que tem a forma de um paralelepípedo retângulo.



O maior valor possível para x, em centímetros, para que a caixa permaneça dentro dos padrões permitidos pela Anac é

Ⓐ 25.
Ⓑ 33.
Ⓒ 42.
Ⓓ 45.
Ⓔ 49.

QUESTÃO 17 – ENEM PPL 2014

Uma pessoa comprou um aquário em forma de um paralelepípedo retângulo reto, com 40 cm de comprimento, 15 cm de largura e 20 cm de altura. Chegando em casa, colocou no aquário uma quantidade de água igual à metade de sua capacidade. A seguir, para enfeitá-lo, irá colocar pedrinhas coloridas, de volume igual a 50 cm^3 cada, que ficarão totalmente submersas no aquário. Após a colocação das pedrinhas, o nível da água deverá ficar a 6 cm do topo do aquário.

O número de pedrinhas a serem colocadas deve ser igual a

Ⓐ 48.
Ⓑ 72.
Ⓒ 84.
Ⓓ 120.
Ⓔ 168.

QUESTÃO 18 – ENEM 2014

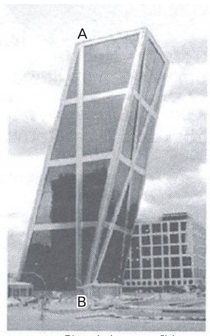
O condomínio de um edifício permite que cada proprietário de apartamento construa um armário em sua vaga de garagem. O projeto da garagem, na escala $1:100$, foi disponibilizado aos interessados já com as especificações das dimensões do armário, que deveria ter o formato de um paralelepípedo retângulo reto, com dimensões, no projeto, iguais a 3cm, 1cm e 2cm.

O volume real do armário, em centímetros cúbicos, será

Ⓐ 6.
Ⓑ 600.
Ⓒ 6.000.
Ⓓ 60.000.
Ⓔ 6.000.000.

QUESTÃO 19 – ENEM 2013

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.



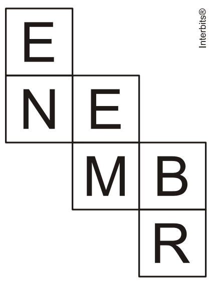
Disponível em: www.flickr.com. Acesso em: 27 mar. 2012

Utilizando 0,26 como valor aproximado para tangente de 15º e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço

Ⓐ menor que 100m^2.
Ⓑ entre 100m^2 e 300m^2.
Ⓒ entre 300m^2 e 500m^2.
Ⓓ entre 500m^2 e 700m^2.
Ⓔ maior que 700m^2.

QUESTÃO 20 – ENEM PPL 2012

Em uma aula de matemática, a professora propôs que os alunos construíssem um cubo a partir da planificação em uma folha de papel, representada na figura a seguir.

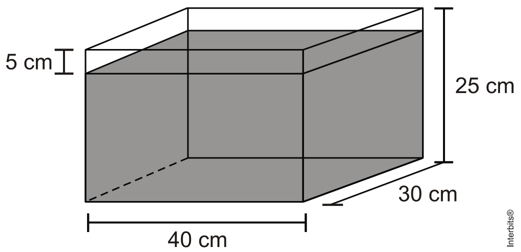


Após a construção do cubo, apoiou-se sobre a mesa a face com a letra M. As faces paralelas deste cubo são representadas pelos pares de letras

Ⓐ E-N, E-M e B-R.
Ⓑ B-N, E-E e M-R.
Ⓒ E-M, B-N e E-R.
Ⓓ B-E, E-R e M-N.
Ⓔ E-N, B-M e E-R.

QUESTÃO 21 – ENEM 2012

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostrado na figura.



O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de 2 400 cm^3?

Ⓐ O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.
Ⓑ O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.
Ⓒ O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.
Ⓓ O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.
Ⓔ O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

QUESTÃO 22 – ENEM PPL 2012

Em um terreno, deseja-se instalar uma piscina com formato de um bloco retangular de altura 1 m e base de dimensões $20\text{m} \times 10\text{m}$. Nas faces laterais e no fundo desta piscina será aplicado um líquido para a impermeabilização. Esse líquido deve ser aplicado na razão de 1 L para cada 1 m^2 de área a ser impermeabilizada. O fornecedor A vende cada lata de impermeabilizante de 10 L por R$ 100,00, e o B vende cada lata de 15 L por R$ 145,00.

Determine a quantidade de latas de impermeabilizante que deve ser comprada e o fornecedor a ser escolhido, de modo a se obter o menor custo.

Ⓐ Fabricante A, 26 latas.
Ⓑ Fabricante A, 46 latas.
Ⓒ Fabricante B, 17 latas.
Ⓓ Fabricante B, 18 latas.
Ⓔ Fabricante B, 31 latas.

QUESTÃO 23 – ENEM 2010

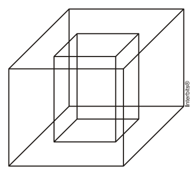
Uma fábrica produz barras de chocolates no formato de paralelepípedos e de cubos, com o mesmo volume. As arestas da barra de chocolate no formato de paralelepípedo medem 3 cm de largura, 18 cm de comprimento e 4 cm de espessura.

Analisando as características das figuras geométricas descritas, a medida das arestas dos chocolates que têm o formato de cubo é igual a

Ⓐ 5 cm.
Ⓑ 6 cm.
Ⓒ 12 cm.
Ⓓ 24 cm.
Ⓔ 25 cm.

QUESTÃO 24 – ENEM 2010

Um porta-lápis de madeira foi construído no formato cúbico, seguindo o modelo ilustrado a seguir. O cubo de dentro e vazio. A aresta do cubo maior mede 12 cm e a do cubo menor, que e interno, mede 8 cm.

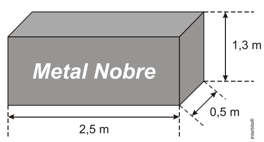


O volume de madeira utilizado na confecção desse objeto foi de

Ⓐ 12 cm^3.
Ⓑ 64 cm^3.
Ⓒ 96 cm^3.
Ⓓ 1 216 cm^3.
Ⓔ 1 728 cm^3.

QUESTÃO 25 – ENEM 2010

A siderúrgica “Metal Nobre” produz diversos objetos maciços utilizando o ferro. Um tipo especial de peça feita nessa companhia tem o formato de um paralepípedo retangular, de acordo com as dimensões indicadas na figura que segue.

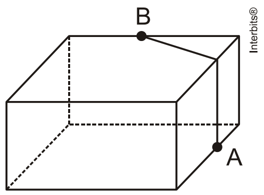


O produto das três dimensões indicadas na peça resultaria na medida da grandeza

Ⓐ massa.
Ⓑ volume.
Ⓒ superfície.
Ⓓ capacidade.
Ⓔ comprimento.

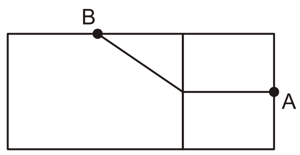
QUESTÃO 26 – ENEM 2010 2ª APLICAÇÃO

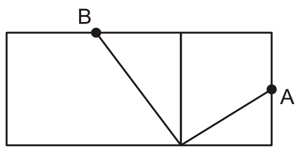
A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos A e B.

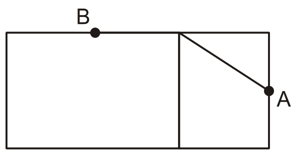


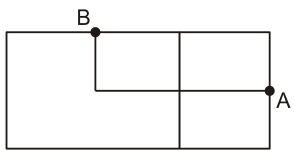
Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em A. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto B por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto.

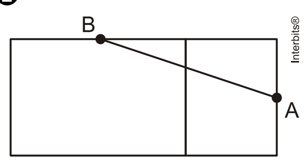
O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos A e B poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

Ⓐ


Ⓑ


Ⓒ


Ⓓ


Ⓔ


QUESTÃO 27 – ENEM SIMULADO 2009

Com o objetivo de trabalhar com seus alunos o conceito de volume de sólidos, um professor fez o seguinte experimento: pegou uma caixa de polietileno, na forma de um cubo com 1 metro de lado, e colocou nela 600 litros de água. Em seguida, colocou, dentro da caixa com água, um sólido que ficou completamente submerso.

Considerando que, ao colocar o sólido dentro da caixa, a altura do nível da água passou a ser 80 cm, qual era o volume do sólido?

Ⓐ 0,2 m^3
Ⓑ 0,48 m^3
Ⓒ 4,8 m^3
Ⓓ 20 m^3
Ⓔ 48 m^3

QUESTÃO 28 – ENEM 2009 CANCELADO

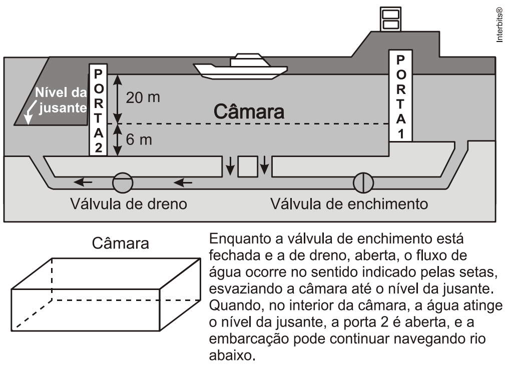
Considere um caminhão que tenha uma carroceria na forma de um paralelepípedo retângulo, cujas dimensões internas são 5,1 m de comprimento, 2,1 m de largura e 2,1 m de altura. Suponha que esse caminhão foi contratado para transportar 240 caixas na forma de cubo com 1 m de aresta cada uma e que essas caixas podem ser empilhadas para o transporte.

Qual é o número mínimo de viagens necessárias para realizar esse transporte?

Ⓐ 10 viagens.
Ⓑ 11 viagens.
Ⓒ 12 viagens.
Ⓓ 24 viagens.
Ⓔ 27 viagens.

QUESTÃO 29 – ENEM 2006

Eclusa é um canal que, construído em águas de um rio com grande desnível, possibilita a navegabilidade, subida ou descida de embarcações. No esquema a seguir, está representada a descida de uma embarcação, pela eclusa do porto Primavera, do nível mais alto do rio Paraná até o nível da jusante.



A câmara dessa eclusa tem comprimento aproximado de 200 m e largura igual a 17 m. A vazão aproximada da água durante o esvaziamento da câmara é de 4.200 m^3 por minuto.

Assim, para descer do nível mais alto até o nível da jusante, uma embarcação leva cerca de

- Ⓐ 2 minutos.
- Ⓑ 5 minutos.
- Ⓒ 11 minutos.
- Ⓓ 16 minutos.
- Ⓔ 21 minutos.

QUESTÃO 30 – ENEM 2003

Uma editora pretende despachar um lote de livros, agrupados em 100 pacotes de 20 cm x 20 cm x 30 cm. A transportadora acondicionará esses pacotes em caixas com formato de bloco retangular de 40 cm x 40 cm x 60 cm.

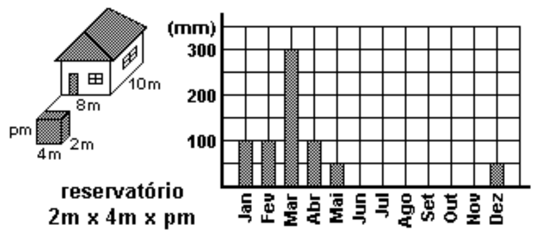
A quantidade mínima necessária de caixas para esse envio é:

- Ⓐ 9
- Ⓑ 11
- Ⓒ 13
- Ⓓ 15
- Ⓔ 17

QUESTÃO 31 – ENEM 2003

Prevenindo-se contra o período anual de seca, um agricultor pretende construir um reservatório fechado, que acumule toda a água proveniente da chuva que cair no telhado de sua casa, ao longo de um período anual chuvoso.

As ilustrações a seguir apresentam as dimensões da casa, a quantidade média mensal de chuva na região, em milímetros, e a forma do reservatório a ser construído.



Sabendo que 100 milímetros de chuva equivalem ao acúmulo de 100 litros de água em uma superfície plana horizontal de um metro quadrado, a profundidade (p) do reservatório deverá medir

- Ⓐ 4 m
- Ⓑ 5 m
- Ⓒ 6 m
- Ⓓ 7 m
- Ⓔ 8 m

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	E
02	D
03	C
04	B
05	C
06	D
07	C
08	E
09	D
10	A
11	D
12	D
13	B
14	D
15	A
16	E
17	A
18	E
19	E
20	C
21	C
22	A
23	B
24	D
25	B
26	E
27	A
28	C
29	D
30	C
31	D

GEOMETRIA ESPACIAL

CILINDROS

ANDERSON
MATEMÁTICA

CILINDRO

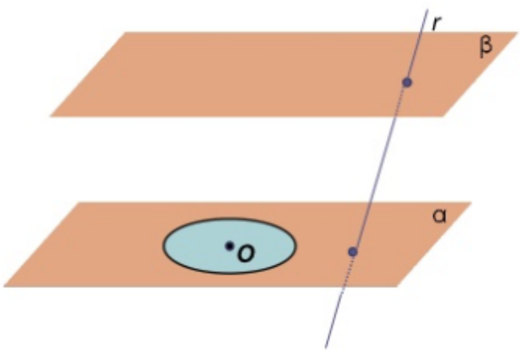
O formato cilíndrico possui várias aplicações no cotidiano: peças de carros, compartimentos de produtos gasosos e líquidos, máquinas industriais, embalagens de produtos para consumo e etc.

A **roda** é talvez uma das invenções principais na trajetória de desenvolvimento tecnológico do ser humano. Com ela, os povos primitivos tornaram o transporte mais rápido e fácil, além de contribuir para transformar as primeiras aglomerações humanas em cidades maiores.

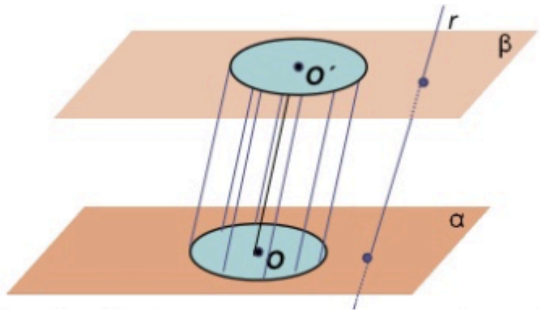
Dada a importância extrema dos cilindros em nosso dia-a-dia, vamos conhecer as propriedades, os elementos e as classificações de um cilindro.

DEFINIÇÃO

Sejam α e β dois planos paralelos distintos, r uma reta secante a esses planos e C um círculo de centro O.

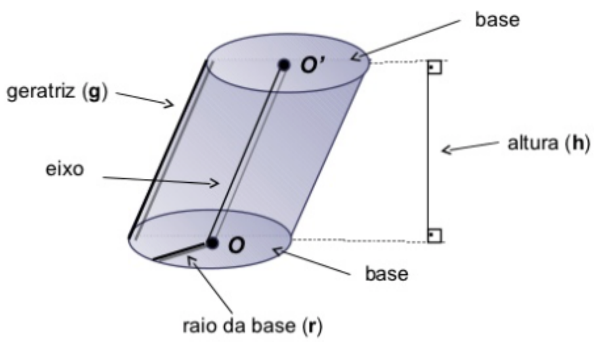


Considere todos os segmentos de reta paralelos a r, de modo que cada um deles tenha um extremo pertencente ao círculo C e outro pertencente a β.



Em outras palavras, o **cilindro** é um corpo redondo com duas bases circulares iguais, opostas e paralelas.

ELEMENTOS



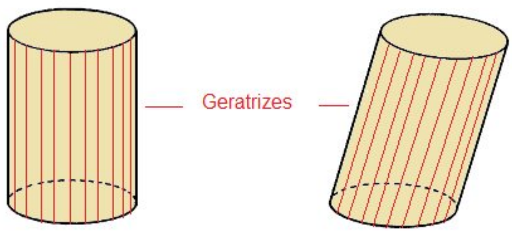
• **Base:** É a região circular plana (círculo). Num cilindro existem duas bases;

• **Raio da base:** medida do raio do círculo da base;

• **Eixo:** É o segmento de reta OO' que liga os centros das bases do "cilindro";

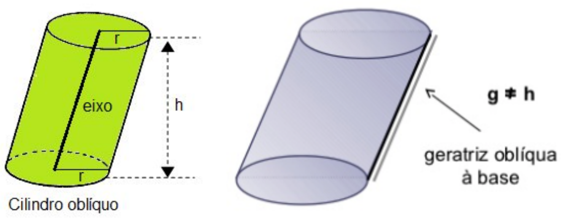
• **Altura:** A altura de um cilindro é a distância entre os dois planos paralelos que contêm as bases do "cilindro";

Geratriz: segmentos paralelos ao eixo cujas extremidades são pontos das circunferências das bases.

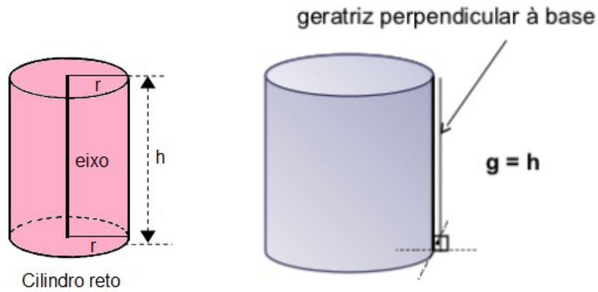


CLASSIFICAÇÃO

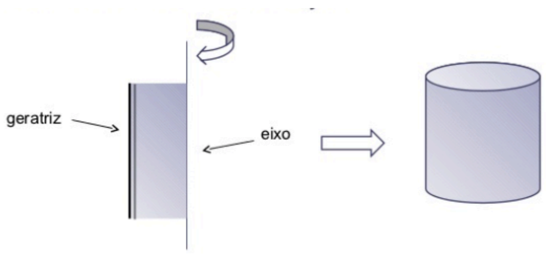
Um cilindro é dito **oblíquo**, quando o seu eixo é **não** é perpendicular ao plano da base, ou ainda, quando sua geratriz **não** for perpendicular ao plano da base.



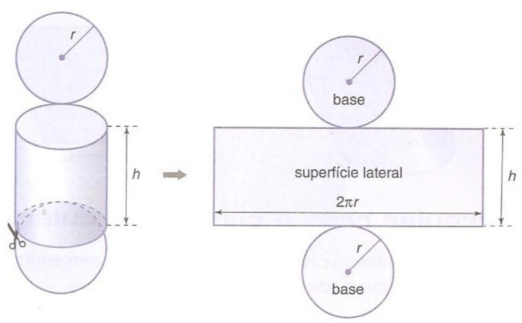
Um cilindro é dito **reto**, quando o seu eixo é perpendicular ao plano da base, ou ainda, quando sua geratriz for perpendicular ao plano da base.



O cilindro circular reto também é conhecido por **cilindro de revolução**, pois pode ser obtido por uma revolução (rotação) de 360º de um retângulo em torno de um eixo que contém um de seus lados.



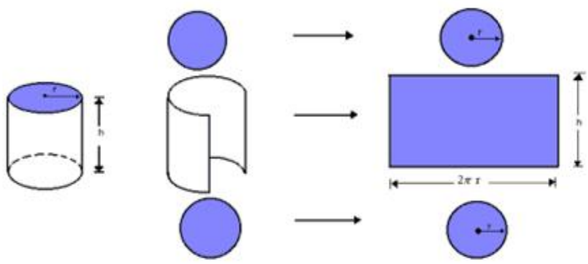
PLANIFICAÇÃO DE UM CILINDRO RETO



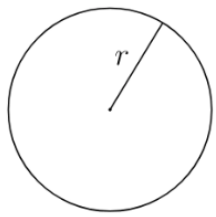
Um cilindro reto é constituído por duas bases circulares e uma superfície lateral retangular.

ÁREAS

Como vimos, o cone reto é formado por dois círculos de raio r em sua base e por um retângulo de base $2\pi r$ e altura h em sua lateral.

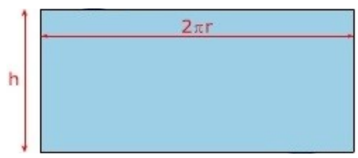


Para calcularmos a **área da base** de um cilindro, basta encontrar a área de um círculo:



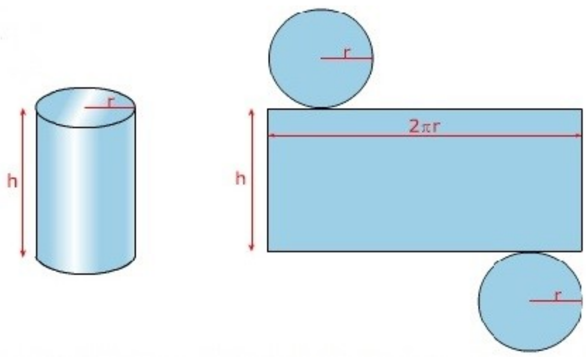
$$A_b = \pi r^2$$

Para calcularmos a **área lateral** de um cilindro, basta encontrar a área do retângulo:



$$A_l = 2\pi r h$$

Enfim, para calcularmos a **área total**, devemos considerar que o cilindro possui duas bases e uma lateral, logo:



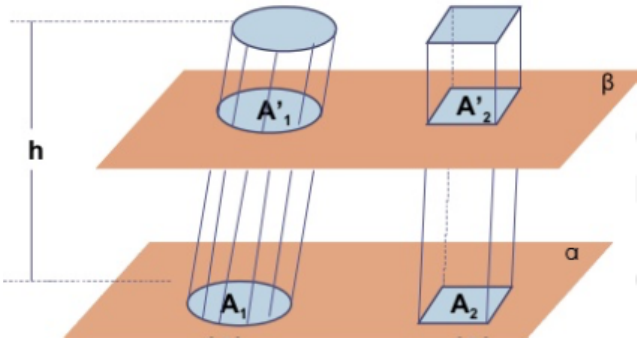
$$A_t = 2A_b + A_l$$

$$A_t = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

VOLUME

O volume do cilindro, de acordo com o princípio de Cavalieri, é obtido da mesma forma que o volume de um prisma.



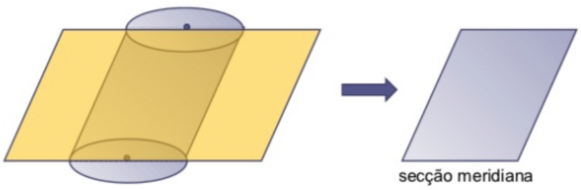
Assim, podemos afirmar que o volume do cilindro é igual ao produto da área da base pela altura, ou:

$$V = A_b \cdot h$$

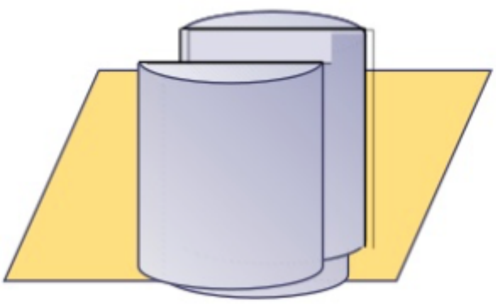
$$V = \pi r^2 h$$

SECÇÃO MERIDIANA

Uma secção meridiana de um cilindro circular é a interseção do cilindro com um plano que passa pelos centros das bases desse cilindro.

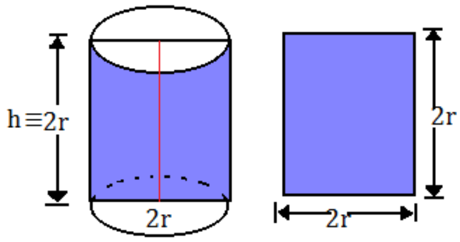


Qualquer secção meridiana de um cilindro circular reto o divide em dois sólidos congruentes, chamados semicilindros circulares retos.



Todo cilindro reto cuja secção meridiana é um quadrado, é chamado de **Cilindro Equilátero**.

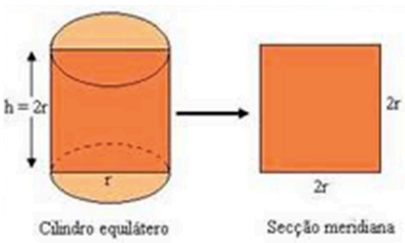
CILINDRO EQUILÁTERO



Como vimos, em um cilindro equilátero, a secção meridiana é um quadrado, para tanto, é necessário que o diâmetro da base $2r$ seja igual a altura h do cilindro.

$$h = 2r$$

Já que $h = 2r$, se efetuarmos as devidas substituições, podemos encontrar todas as características em função do raio:



Área da base

$$A_b = \pi r^2$$

Área lateral

$$A_l = 2\pi r h$$

$$A_l = 2\pi r \cdot 2r$$

$$A_l = 4\pi r^2$$

Área total

$$A_t = 2\pi r(r + h)$$

$$A_t = 2\pi r(r + 2r)$$

$$A_t = 2\pi r \cdot 3r$$

$$A_l = 6\pi r^2$$

Volume

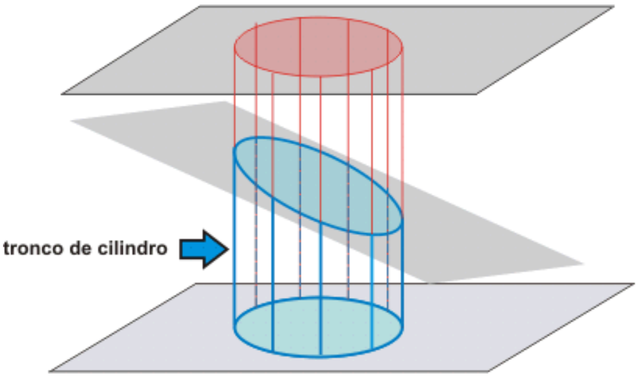
$$V = \pi r^2 h$$

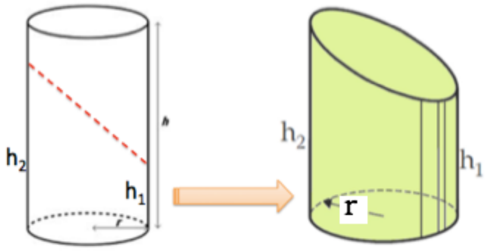
$$V = \pi r^2 \cdot 2r$$

$$V = 2\pi r^3$$

TRONCO DE CILINDRO RETO

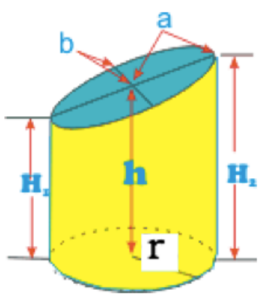
O tronco de cilindro reto é sólido obtido através de uma secção transversal não paralela aos planos da base.





Tronco de cilindro

Perceba que o tronco de cilindro permanece com a mesma base circular de raio r, porém possui uma altura menor h_1 em uma extremidade e uma altura maior h_2 em outra extremidade. Para calcular o volume, não usaremos a altura menor, nem usaremos a maior, usaremos, no entanto, a altura média $h = \frac{h_1+h_2}{2}$.



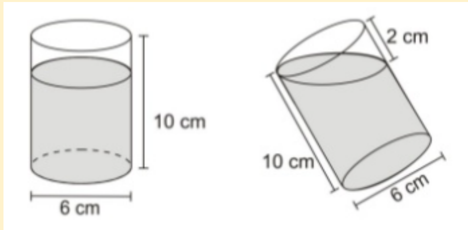
Logo, o volume será dado por:

$$V_T = \pi r^2 h$$

$$V_T = \pi r^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

Exemplo:

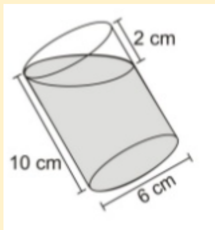
Um copo cilíndrico, cujo diâmetro interno mede 6 cm e cuja altura interna mede 10 cm contem certo volume de agua. Inclinando o máximo possível esse copo, sem derramar água, obtemos a medida descrita na figura abaixo.



Qual o volume de água contida no copo?

Solução:

Perceba que a água admite o formato de um tronco de cone reto:



Podemos destacar as seguintes dimensões:

Altura menor $h_1 = 10 - 2 = 8cm$
Altura maior $h_2 = 10cm$
Raio da base $r = 3cm$

O volume será dado por:

$$V_T = \pi r^2 \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)$$

$$V_T = \pi \cdot 3^2 \cdot \left(\frac{8 + 10}{2}\right)$$

$$V_T = 9 \cdot \pi \cdot \left(\frac{18}{2}\right)$$

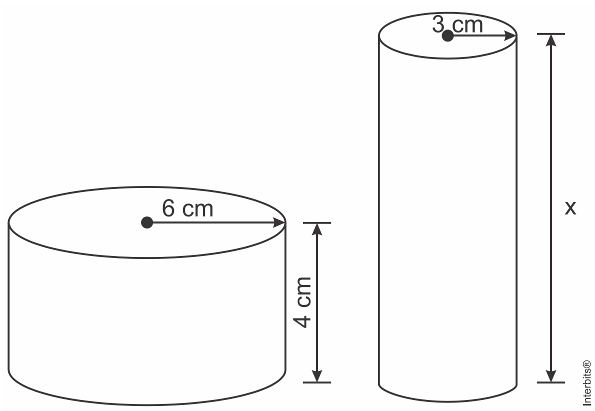
$$V_T = 9 \cdot \pi \cdot 9$$

$$V_T = 81cm^3$$

$$V_T = 81ml$$

QUESTÃO 01 – ENEM PPL 2015

Uma fábrica brasileira de exportação de peixes vende para o exterior atum em conserva, em dois tipos de latas cilíndricas: uma de altura igual a 4 cm e raio 6 cm, e outra de altura desconhecida e raio de 3 cm, respectivamente, conforme figura. Sabe-se que a medida do volume da lata que possui raio maior, $V1$, é 1,6 vezes a medida do volume da lata que possui raio menor, $V2$.



A medida da altura desconhecida vale

A) 8 cm.
B) 10 cm.
C) 16 cm.
D) 20 cm.
E) 40 cm.

QUESTÃO 02 – ENEM 2015

Para resolver o problema de abastecimento de água foi decidida, numa reunião do condomínio, a construção de uma nova cisterna. A cisterna atual tem formato cilíndrico, com 3 m de altura e 2 m de diâmetro, e estimou-se que a nova cisterna deverá comportar 81 m^3 de água, mantendo o formato cilíndrico e a altura da atual. Após a inauguração da nova cisterna a antiga será desativada.

Utilize $3,0$ como aproximação para π.

Qual deve ser o aumento, em metros, no raio da cisterna para atingir o volume desejado?

A) 0,5
B) 1,0
C) 2,0
D) 3,5
E) 8,0

QUESTÃO 03 – ENEM PPL 2015

Um artesão fabrica vários tipos de potes cilíndricos. Mostrou a um cliente um pote de raio de base a e altura b. Esse cliente, por sua vez, quer comprar um pote com o dobro do volume do pote apresentado. O artesão diz que possui potes com as seguintes dimensões:

- Pote I: raio a e altura $2b$
- Pote II: raio $2a$ e altura b
- Pote III: raio $2a$ e altura $2b$
- Pote IV: raio $4a$ e altura b
- Pote V: raio $4a$ e altura $2b$

O pote que satisfaz a condição imposta pelo cliente é o

A) I.
B) II.
C) III.
D) IV.
E) V.

QUESTÃO 04 – ENEM 2014

Uma empresa que organiza eventos de formatura confecciona canudos de diplomas a partir de folhas de papel quadradas. Para que todos os canudos fiquem idênticos, cada folha é enrolada em torno de um cilindro de madeira de diâmetro d em centímetros, sem folga, dando-se 5 voltas completas em torno de tal cilindro. Ao final, amarra-se um cordão no meio do diploma, bem ajustado, para que não ocorra o desenrolamento, como ilustrado na figura.

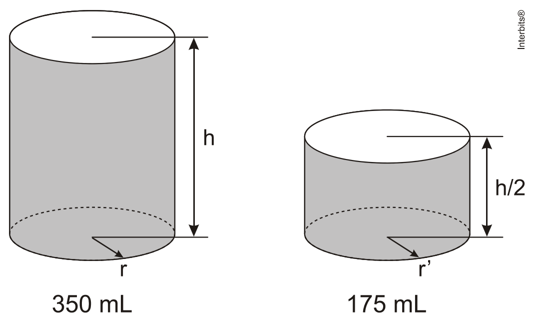
Em seguida, retira-se o cilindro de madeira do meio do papel enrolado, finalizando a confecção do diploma. Considere que a espessura da folha de papel original seja desprezível.

Qual é a medida, em centímetros, do lado da folha de papel usado na confecção do diploma?

A) πd
B) $2\pi d$
C) $4\pi d$
D) $5\pi d$
E) $10\pi d$

QUESTÃO 05 – ENEM PPL 2013

Um fabricante de bebidas, numa jogada de *marketing*, quer lançar no mercado novas embalagens de latas de alumínio para os seus refrigerantes. As atuais latas de 350 mL devem ser substituídas por uma nova embalagem com metade desse volume, conforme mostra a figura:



De acordo com os dados anteriores, qual a relação entre o raio **r'** da embalagem de 175 mL e o raio **r** da embalagem de 350 mL?

A $r' = \sqrt{r}$

B $r' = \frac{r}{2}$

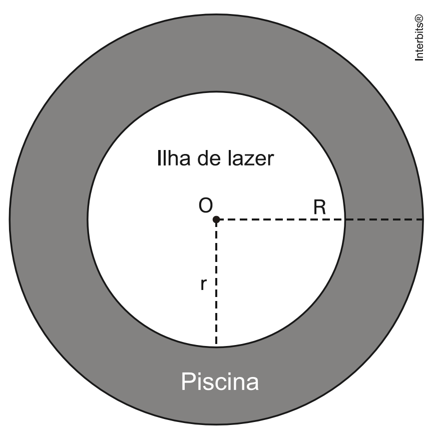
C $r' = r$

D $r' = 2r$

E $r' = \sqrt[3]{2}$

QUESTÃO 06 – ENEM 2013

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a 12m³, cuja base tem um raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, 4m³.



Considere 3 como o valor aproximado para π.

Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de

A 1,6.

B 1,7.

C 2,0.

D 3,0.

E 3,8.

QUESTÃO 07 – ENEM PPL 2012

Uma prefeitura possui modelos de lixeira de forma cilíndrica, sem tampa, com raio medindo 10 cm e altura de 50 cm. Para fazer uma compra adicional, solicita à empresa fabricante um orçamento de novas lixeiras, com a mesma forma e outras dimensões. A prefeitura só irá adquirir as novas lixeiras se a capacidade de cada uma for no mínimo dez vezes maior que o modelo atual e seu custo unitário não ultrapassar R$ 20,00.

O custo de cada lixeira é proporcional à sua área total e o preço do material utilizado na sua fabricação é de R$ 0,20 para cada 100 cm².

A empresa apresenta um orçamento discriminando o custo unitário e as dimensões, com o raio sendo o triplo do anterior e a altura aumentada em 10 cm.

(Aproxime π para 3.)

O orçamento dessa empresa é rejeitado pela prefeitura, pois

A o custo de cada lixeira ficou em R$ 21,60.

B o custo de cada lixeira ficou em R$ 27,00.

C o custo de cada lixeira ficou em R$ 32,40.

D a capacidade de cada lixeira ficou 3 vezes maior.

E capacidade de cada lixeira ficou 9 vezes maior.

QUESTÃO 08 – ENEM 2011

É possível usar água ou comida para atrair as aves e observá-las. Muitas pessoas costumam usar água com açúcar, por exemplo, para atrair beija-flores. Mas é importante saber que, na hora de fazer a mistura, você deve sempre usar uma parte de açúcar para cinco partes de água. Além disso, em dias quentes, precisa trocar a água de duas a três vezes, pois com o calor ela pode fermentar e, se for ingerida pela ave, pode deixá-la doente. O excesso de açúcar, ao cristalizar, também pode manter o bico da ave fechado, impedindo-a de se alimentar. Isso pode até matá-la.

Ciência Hoje das Crianças.
FNDE; Instituto Ciência Hoje, n. 166, mar 1996.

Pretende-se encher completamente um copo com a mistura para atrair beija-flores. O copo tem formato cilíndrico, e suas medidas são 10 cm de altura e 4 cm de diâmetro.

A quantidade de água que deve ser utilizada na mistura é cerca de (utilize $\pi = 3$)

Ⓐ 20 mL.
Ⓑ 24 mL.
Ⓒ 100 mL.
Ⓓ 120 mL.
Ⓔ 600 mL.

QUESTÃO 09 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

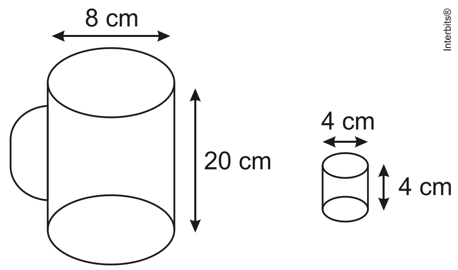
Um fabricante de creme de leite comercializa seu produto em embalagens cilíndricas de diâmetro da base medindo 4 cm e altura 13,5 cm. O rótulo de cada uma custa R$ 0,60. Esse fabricante comercializará o referido produto em embalagens ainda cilíndricas de mesma capacidade, mas com a medida do diâmetro da base igual à da altura.

Levando-se em consideração exclusivamente o gasto com o rótulo, o valor que o fabricante deverá pagar por esse rótulo é de

Ⓐ R$ 0,20, pois haverá uma redução de 2/3 na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
Ⓑ R$ 0,40, pois haverá uma redução de 1/3 na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
Ⓒ R$ 0,60, pois não haverá alteração na capacidade da embalagem.
Ⓓ R$ 0,80, pois haverá um aumento de 1/3 na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.
Ⓔ R$ 1,00, pois haverá um aumento de 2/3 na superfície da embalagem coberta pelo rótulo.

QUESTÃO 10 – ENEM 2010

Dona Maria, diarista na casa da família Teixeira, precisa fazer café para servir as vinte pessoas que se encontram numa reunião na sala. Para fazer o café, Dona Maria dispõe de uma leiteira cilíndrica e copinhos plásticos, também cilíndricos.



Com o objetivo de não desperdiçar café, a diarista deseja colocar a quantidade mínima de água na leiteira para encher os vinte copinhos pela metade. Para que isso ocorra, Dona Maria deverá

Ⓐ encher a leiteira até a metade, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
Ⓑ encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 20 vezes maior que o volume do copo.
Ⓒ encher a leiteira toda de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
Ⓓ encher duas leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.
Ⓔ encher cinco leiteiras de água, pois ela tem um volume 10 vezes maior que o volume do copo.

QUESTÃO 11 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

Certa marca de suco é vendida no mercado em embalagens tradicionais de forma cilíndrica. Relançando a marca, o fabricante pôs à venda embalagens menores, reduzindo a embalagem tradicional à terça parte de sua capacidade.
Por questões operacionais, a fábrica que fornece as embalagens manteve a mesma forma, porém reduziu à metade o valor do raio da base da embalagem tradicional na construção da nova embalagem. Para atender à solicitação de redução da capacidade, após a redução no raio, foi necessário determinar a altura da nova embalagem.

Que expressão relaciona a medida da altura da nova embalagem de suco (a) com a altura da embalagem tradicional (*h*)?

Ⓐ $a = \frac{h}{12}$

Ⓑ $a = \frac{h}{6}$

Ⓒ $a = \frac{2h}{3}$

Ⓓ $a = \frac{4h}{3}$

Ⓔ $a = \frac{4h}{9}$

QUESTÃO 12 – ENEM 2010

No manejo sustentável de florestas, é preciso muitas vezes obter o volume da tora que pode ser obtida a partir de uma árvore.

Para isso, existe um método prático, em que se mede a circunferência da árvore à altura do peito de um homem (1,30 m), conforme indicado na figura. A essa medida denomina-se "rodo" da árvore.

O quadro a seguir indica a fórmula para se *cubar*, ou seja, obter o volume da tora em m³ a partir da medida do rodo e da altura da árvore.

O volume da tora em m³ é dado por

V = rodo² x altura x 0,06

O rodo e a altura da árvore devem ser medidos em metros. O coeficiente 0,06 foi obtido experimentalmente.

Um técnico em manejo florestal recebeu a missão de cubar, abater e transportar cinco toras de madeira, de duas espécies diferentes, sendo

• 3 toras da espécie I, com 3 m de rodo, 12 m de comprimento e densidade 0,77 toneladas/m³;

• 2 toras da espécie II, com 4 m de rodo, 10 m de comprimento e densidade 0,78 toneladas/m³.

Após realizar seus cálculos, o técnico solicitou que enviassem caminhões para transportar uma carga de, aproximadamente,

Ⓐ 29,9 toneladas.
Ⓑ 31,1 toneladas.
Ⓒ 32,4 toneladas.
Ⓓ 35,3 toneladas.
Ⓔ 41,8 toneladas.

QUESTÃO 13 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

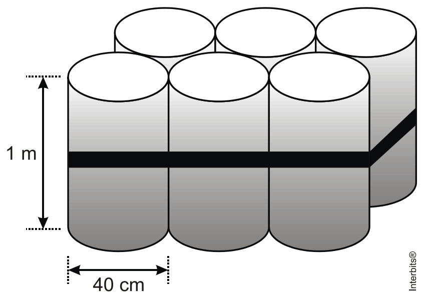
João tem uma loja onde fabrica e vende moedas de chocolate com diâmetro de 4 cm e preço de R$ 1,50 a unidade. Pedro vai a essa loja e, após comer várias moedas de chocolate, sugere ao João que ele faça moedas com 8 cm de diâmetro e mesma espessura e cobre R$ 3,00 a unidade.

Considerando que o preço da moeda depende apenas da quantidade de chocolate, João

Ⓐ aceita a proposta de Pedro, pois, se dobra o diâmetro, o preço também deve dobrar.
Ⓑ rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 12,00.
Ⓒ rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 7,50.
Ⓓ rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 6,00.
Ⓔ rejeita a proposta de Pedro, pois o preço correto seria R$ 4,50.

QUESTÃO 14 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

O administrador de uma cidade, implantando uma política de reutilização de materiais descartados, aproveitou milhares de tambores cilíndricos dispensados por empresas da região e montou *kits* com seis tambores para o abastecimento de água em casas de famílias de baixa renda, conforme a figura seguinte. Além disso, cada família envolvida com o programa irá pagar somente R$ 2,50 por metro cúbico utilizado.

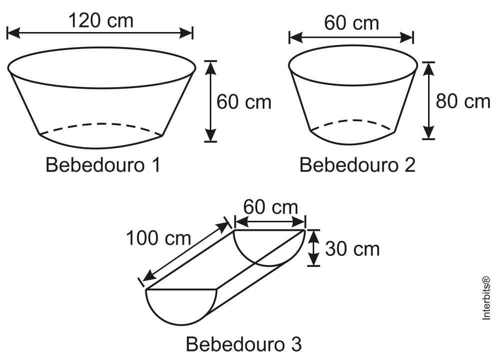


Uma família que utilizar 12 vezes a capacidade total do *kit* em um mês pagará a quantia de (considere $\pi \cong 3$)

A R$ 86,40.
B R$ 21,60.
C R$ 8,64.
D R$ 7,20.
E R$ 1,80.

QUESTÃO 15 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

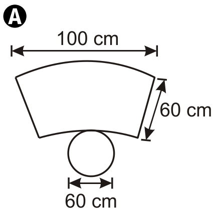
Alguns testes de preferência por bebedouros de água foram realizados com bovinos, envolvendo três tipos de bebedouros, de formatos e tamanhos diferentes. Os bebedouros 1 e 2 têm a forma de um tronco de cone circular reto, de altura igual a 60 cm, e diâmetro da base superior igual a 120 cm e 60 cm, respectivamente. O bebedouro 3 é um semicilindro, com 30 cm de altura, 100 cm de comprimento e 60 cm de largura. Os três recipientes estão ilustrados na figura.



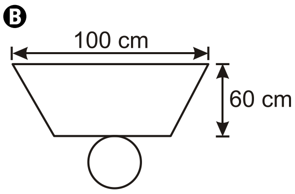
A escolha do bebedouro. In: *Biotemas*. V.22, no. 4, 2009 (adaptado).

Considerando que nenhum dos recipientes tenha tampa, qual das figuras a seguir representa uma planificação para o bebedouro 3?

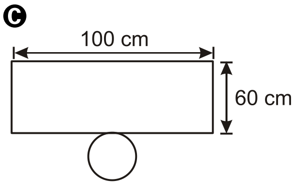
A



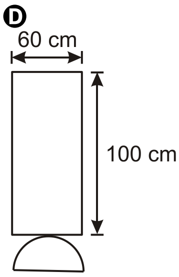
B



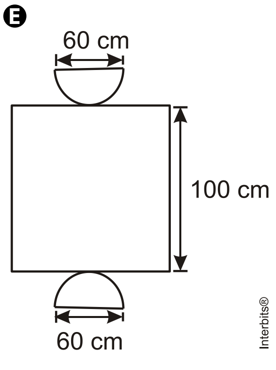
C



D

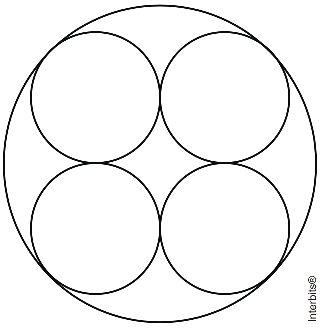


E



QUESTÃO 16 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior



Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a

Ⓐ 12 cm
Ⓑ $12\sqrt{2}$cm
Ⓒ $24\sqrt{2}$cm
Ⓓ $6\left(1+\sqrt{2}\right)$cm
Ⓔ $12\left(1+\sqrt{2}\right)$cm

QUESTÃO 17 – ENEM 2010

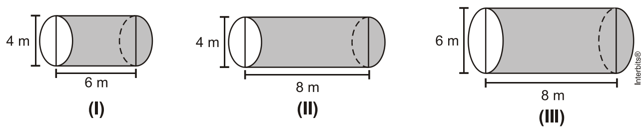
Para construir uma manilha de esgoto, um cilindro com 2 m de diâmetro e 4 m de altura (de espessura desprezível), foi envolvido homogeneamente por uma camada de concreto, contendo 20 cm de espessura.

Supondo que cada metro cúbico de concreto custe R$ 10,00 e tomando 3,1 como valor aproximado de ð, então o preço dessa manilha é igual a

Ⓐ R$ 230,40.
Ⓑ R$ 124,00.
Ⓒ R$ 104,16.
Ⓓ R$ 54,56.
Ⓔ R$ 49,60.

QUESTÃO 18 – ENEM 2010

Uma empresa vende tanques de combustíveis de formato cilíndrico, em três tamanhos, com medidas indicadas nas figuras. O preço do tanque é diretamente proporcional à medida da área da superfície lateral do tanque. O dono de um posto de combustível deseja encomendar um tanque com menor custo por metro cúbico de capacidade de armazenamento.



Qual dos tanques devera ser escolhido pelo dono do posto? (Considere $\pi \cong 3$)

Ⓐ I, pela relação área/capacidade de armazenamento de 1/3.
Ⓑ I, pela relação área/capacidade de armazenamento de 4/3.
Ⓒ II, pela relação área/capacidade de armazenamento de 3/4.
Ⓓ III, pela relação área/capacidade de armazenamento de 2/3.
Ⓔ III, pela relação área/capacidade de armazenamento de 7/12.

QUESTÃO 19 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

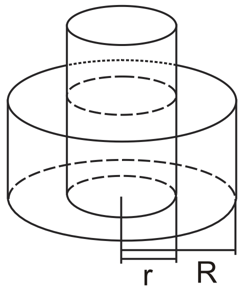
Uma empresa de refrigerantes, que funciona sem interrupções, produz um volume constante de 1 800 000 cm3 de líquido por dia. A máquina de encher garrafas apresentou um defeito durante 24 horas. O inspetor de produção percebeu que o líquido chegou apenas à altura de 12 cm dos 20 cm previstos em cada garrafa. A parte inferior da garrafa em que foi depositado o líquido tem forma cilíndrica com raio da base de 3 cm. Por questões de higiene, o líquido já engarrafado não será reutilizado.

Utilizando $\pi \cong 3$, no período em que a máquina apresentou defeito, aproximadamente quantas garrafas foram utilizadas?

Ⓐ 555
Ⓑ 5555
Ⓒ 1333
Ⓓ 13333
Ⓔ 133333

QUESTÃO 20 – ENEM CANCELADO 2009

Em uma praça pública, há uma fonte que é formada por dois cilindros, um de raio r e altura h_1, e o outro de raio R e altura h_2.



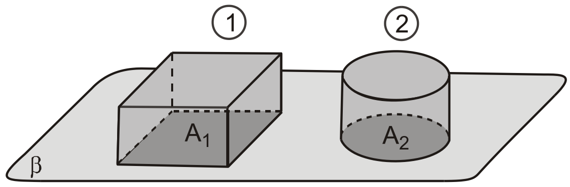
O cilindro do meio enche e, após transbordar, começa a encher o outro.

Se $R = r\sqrt{2}$ e $h_2 = \frac{h_1}{3}$ e, para encher o cilindro do meio, foram necessários 30 minutos, então, para se conseguir encher essa fonte e o segundo cilindro, de modo que fique completamente cheio, serão necessários

A 20 minutos.
B 30 minutos.
C 40 minutos.
D 50 minutos.
E 60 minutos.

QUESTÃO 21 – ENEM CANCELADO 2009

Em uma padaria, há dois tipos de forma de bolo, formas 1 e 2, como mostra a figura abaixo.



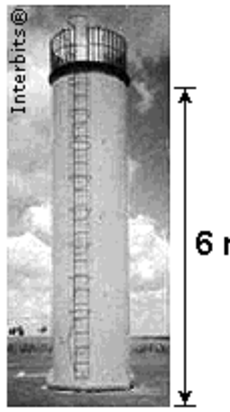
Sejam L o lado da base da forma quadrada, r o raio da base da forma redonda, A_1 e A_2 as áreas das bases das formas 1 e 2, e V_1 e V_2 os seus volumes, respectivamente.

Se as formas têm a mesma altura h, para que elas comportem a mesma quantidade de massa de bolo, qual é a relação entre r e L?

A $L = r$
B $L = 2r$
C $L = \pi r$
D $L = r\sqrt{\pi}$
E $L = \frac{(\pi r2)}{2}$

QUESTÃO 22 – ENEM 2008

A figura abaixo mostra um reservatório de água na forma de um cilindro circular reto, com $6\,m$ de altura. Quando está completamente cheio, o reservatório é suficiente para abastecer, por um dia, 900 casas cujo consumo médio diário é de 500 litros de água.

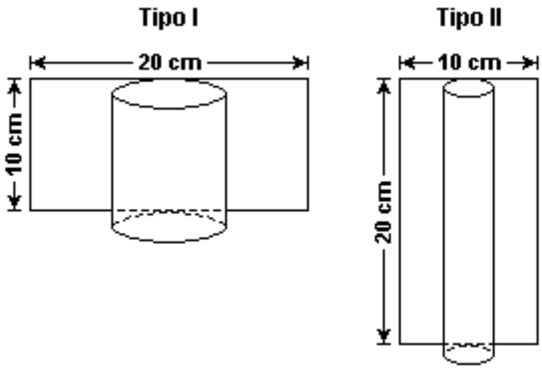


Suponha que, um certo dia, após uma campanha de conscientização do uso da água, os moradores das 900 casas abastecidas por esse reservatório tenham feito economia de 10% no consumo de água. Nessa situação,

A a quantidade de água economizada foi de $4,5\,m^3$.
B a altura do nível da água que sobrou no reservatório, no final do dia, foi igual a $60\,cm$.
C a quantidade de água economizada seria suficiente para abastecer, no máximo, 90 casas cujo consumo diário fosse de 450 litros.
D os moradores dessas casas economizariam mais de R\$ 200,00, se o custo de $1\,m^3$ de água para o consumidor fosse igual a R\$ 2,50.
E um reservatório de mesma forma e altura, mas com raio da base 10% menor que o representado, teria água suficiente para abastecer todas as casas.

QUESTÃO 23 – ENEM 2006

Uma artesã confecciona dois diferentes tipos de vela ornamental a partir de moldes feitos com cartões de papel retangulares de $20\,cm \times 10\,cm$ (conforme ilustram as figuras abaixo). Unindo dois lados opostos do cartão, de duas maneiras, a artesã forma cilindros e, em seguida, os preenche completamente com parafina.



Supondo-se que o custo da vela seja diretamente proporcional ao volume de parafina empregado, o custo da vela do tipo I, em relação ao custo da vela do tipo II, será

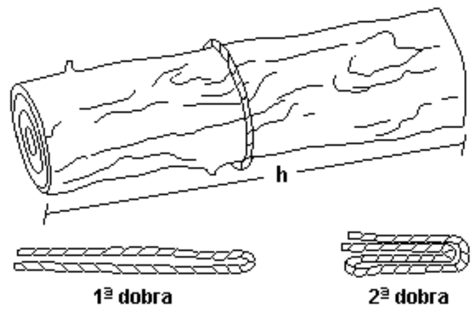
Ⓐ o triplo.
Ⓑ o dobro.
Ⓒ igual.
Ⓓ a metade.
Ⓔ a terça parte.

QUESTÃO 24 – ENEM 2001

Em muitas regiões do Estado do Amazonas, o volume de madeira de uma árvore cortada é avaliado de acordo com uma prática dessas regiões:

I. Dá-se uma volta completa em torno do tronco com um barbante.

II. O barbante é dobrado duas vezes pela ponta e, em seguida, seu comprimento é medido com fita métrica.



III. O valor obtido com essa medida é multiplicado por ele mesmo e depois multiplicado pelo comprimento do tronco. Esse é o volume estimado de madeira.

Outra estimativa pode ser obtida pelo cálculo formal do volume do tronco, considerando-o um cilindro perfeito.

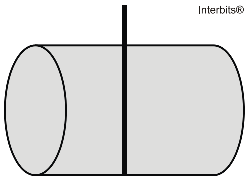
A diferença entre essas medidas é praticamente equivalente às perdas de madeira no processo de corte para comercialização.

Pode-se afirmar que essas perdas são da ordem de

Ⓐ 30%.
Ⓑ 22%.
Ⓒ 15%.
Ⓓ 12%.
Ⓔ 5%.

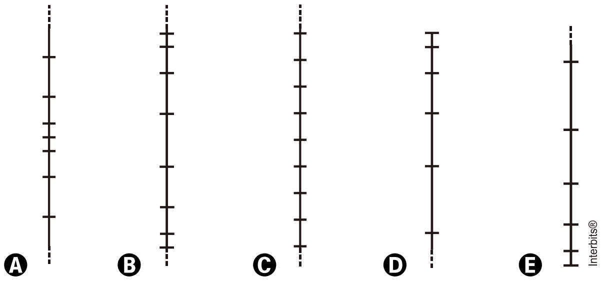
QUESTÃO 25 – ENEM 2000

Uma empresa de transporte armazena seu combustível em um reservatório cilíndrico enterrado horizontalmente.



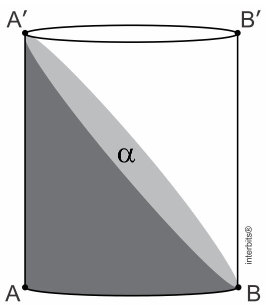
Seu conteúdo é medido com uma vara graduada em vinte intervalos, de modo que a distância entre duas graduações consecutivas representa sempre o mesmo volume.

A ilustração que melhor representa a distribuição das graduações na vara é:



QUESTÃO 26 – UERJ 2017

Um cilindro circular reto possui diâmetro AB de 4 cm e altura AA' de 10 cm. O plano α, perpendicular à seção meridiana $ABB'A'$, que passa pelos pontos B e A' das bases, divide o cilindro em duas partes, conforme ilustra a imagem.



O volume da parte do cilindro compreendida entre o plano α e a base inferior, em cm^3, é igual a:

A) 8π
B) 12π
C) 16π
D) 20π

QUESTÃO 27 – IFBA 2017

Um metalúrgico utilizou num determinado trabalho, uma folha de metal retangular de dimensões 20 cm e 30 cm, com o intuito de formar um cilindro, unindo os lados da folha de metal de mesma dimensão, e verificou que existiam duas possibilidades:

A: Utilizar o lado de 20 cm como altura do cilindro;
B: Utilizar o lado de 30 cm como altura do cilindro.

Considerando $\pi = 3$, e chamando de V_A o volume da possibilidade A, e V_B o volume da possibilidade B. Podemos afirmar que:

A) $V_A = V_B = 1.000$
B) $V_A = V_B = 1.500$
C) $V_A = 1.000$ e $V_B = 1.500$
D) $V_A = 2.000$ e $V_B = 3.000$
E) $V_A = 1.500$ e $V_B = 1.000$

QUESTÃO 28 – IFPE 2017

O setor de criação de uma fábrica de tintas está desenvolvendo um novo recipiente em formato de cilindro reto com 10 cm de raio da base e 25 cm de altura.

Qual o volume de tinta (em mililitros) que comporta um desses recipientes? (Use $\pi = 3{,}14$).

A) 2.500
B) 785
C) 7,85
D) 7.850
E) 2,5

QUESTÃO 29 – UERJ 2017

Diante dos frequentes períodos de estiagem na cidade onde está sediada, a empresa MESOC decidiu construir um reservatório para armazenar água.
Considerando que esse reservatório deva ser cilíndrico e ter 10 metros de diâmetro interno e 10 metros de altura, a capacidade do reservatório a ser construído, em litros, será:

Obs.: (Use $\pi = 3{,}1$)

A) 3.100
B) 7.750
C) 155.000
D) 310.000
E) 775.000

QUESTÃO 30 – UFPA 2016

Um tanque cilíndrico de $0{,}8\text{ m}$ de raio, com eixo na vertical em relação ao solo, está com combustível que é consumido em um veículo à razão média de 4 km por litro.

Se o veículo se mover a 50 km/h, a velocidade da coluna de combustível em cm/h é de

A) $8{,}2$.
B) $4{,}3$.
C) $2{,}1$.
D) $1{,}8$.
E) $0{,}6$.

QUESTÃO 31 – UFU 2016

A densidade (ou densidade volumétrica) de um material mede a quantidade de matéria (massa) que está presente em uma unidade de volume desse material. Embora todo material seja um objeto espacial, é comum considerarmos sendo de "natureza linear". Por exemplo, um fio de cobre tem natureza linear e consideramos sua densidade linear (razão de sua massa pelo seu comprimento).

O vergalhão $\text{CA}-60$ são barras de aço muito resistentes, utilizadas na construção civil e comercializadas em barras padrão de 12 metros. Admitindo que essas barras sejam cilíndricas, seus diâmetros (bitolas) variam de $4{,}2$ a $9{,}5\text{ mm}$. De acordo com as especificações da norma NBR 7480, a barra da bitola de $6{,}0\text{ mm}$ tem densidade linear de $0{,}222\text{ kg/m}$ (quilograma por metro).

Com base nas informações apresentadas, a densidade, em kg/m^3, de uma barra de bitola 6 mm é igual a

A) $\dfrac{222}{36\pi}$
B) $\dfrac{222}{9\pi}$
C) $\dfrac{222000}{9\pi}$
D) $\dfrac{222000}{36\pi}$

QUESTÃO 32 – IFSC 2016

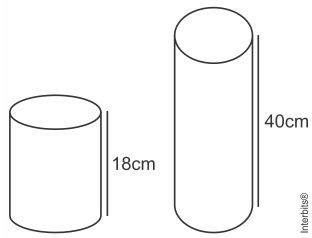
Uma Metalúrgica fabrica tanques em formato de cilindros retos para armazenar combustíveis. Um desses reservatórios tem área lateral de 5π metros quadrados e o seu volume possui a capacidade de 10π metros cúbicos.

Nessas condições, a medida do raio da base desse reservatório é:

A) 16m
B) 80cm
C) 8m
D) 40dm
E) 160cm

QUESTÃO 33 – EEAR 2016

Um cilindro de 18 cm de altura e raio da base igual a 5 cm contém água até a metade de sua altura. Por algum motivo, houve necessidade de despejar essa água em outro cilindro com 40 cm de altura, cujo raio da base mede 4 cm.



Considerando $\pi = 3$, o valor que mais se aproxima da altura atingida pela água no segundo cilindro é

A) 14 cm
B) 16 cm
C) 20 cm
D) 24 cm

QUESTÃO 34 – IFAL 2016

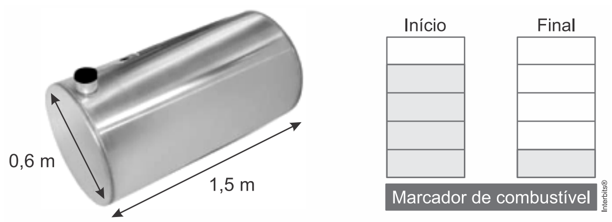
Uma determinada empresa fabrica latas de óleo, em formato cilíndrico, com capacidade total de 1 litro e recebe uma encomenda para fabricar latas de mesmo formato, com capacidade total de $1/2$ litro, mas que estas sejam da mesma altura das latas de 1 litro.

Qual é a razão entre os diâmetros da lata de 1 litro e da nova lata de $1/2$ litro?

A) 2.
B) $2^{1/2}$.
C) π.
D) $\pi^{1/2}$.

QUESTÃO 35 – UPE 2016

A figura abaixo representa um tanque de combustível de certa marca de caminhão a diesel.



Sabendo que esse veículo faz, em média, 3 km/L, e, observando o marcador de combustível no início e no final de uma viagem, quantos quilômetros esse caminhão percorreu?
Considere $\pi \cong 3$.

- **A** 243 km
- **B** 425 km
- **C** 648 km
- **D** 729 km
- **E** 813 km

QUESTÃO 36 – FAE 2016

Sobre uma artéria média, sabe-se que o diâmetro externo de uma seção reta e a espessura da parede medem 0,04 dm e 1 mm, respectivamente.

Considerando que uma seção reta dessa artéria, obtida por dois cortes transversais distantes 1,5 cm um do outro, tem a forma de um cilindro circular reto, quantos mililitros de sangue ela deve comportar, em relação ao seu diâmetro interno? (Considere a aproximação: $\pi = 3$)

- **A** 0,018
- **B** 0,045
- **C** 0,18
- **D** 0,45

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	B
02	C
03	A
04	D
05	C
06	A
07	B
08	C
09	B
10	A
11	D
12	A
13	D
14	B
15	E
16	D
17	D
18	D
19	B
20	C
21	D
22	B
23	B
24	B
25	A
26	D
27	E
28	D
29	E
30	E
31	C
32	D
33	A
34	B
35	D
36	B

GEOMETRIA ESPACIAL

PIRÂMIDES

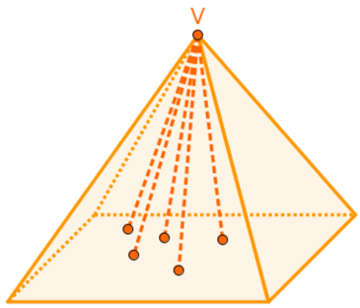
ANDERSON
MATEMÁTICA

PIRÂMIDES

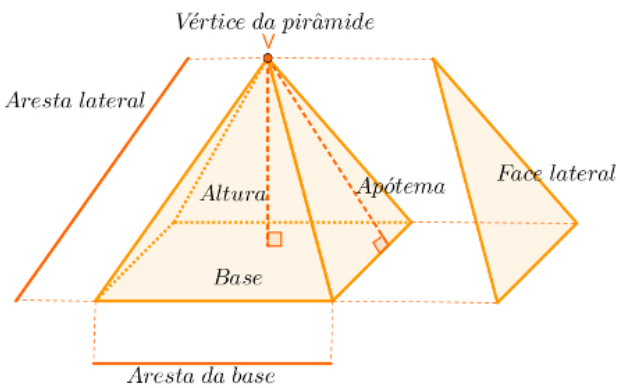
Pirâmides são poliedros construídos a partir de uma base poligonal e um ponto fora do plano em que se situa a base. São tridimensionais e, por isso, elas só podem ser definidas no espaço.

DEFINIÇÃO

Uma pirâmide é o conjunto de segmentos de reta cujas extremidades são um polígono e um ponto fora do plano que contém esse polígono.



ELEMENTOS DE UMA PIRÂMIDE



Faces: são os polígonos que podem ser observados nesse poliedro;

Arestas: são os segmentos de reta formados nas intersecções das faces;

Vértices: são os pontos de encontro entre as arestas;

Vértice da pirâmide: é o ponto V na figura acima;

Base: polígono usado na definição da pirâmide;

Arestas da base: arestas que pertencem à base;

Arestas laterais: arestas que não pertencem à base da pirâmide;

Faces laterais: faces da pirâmide que não são a sua base;

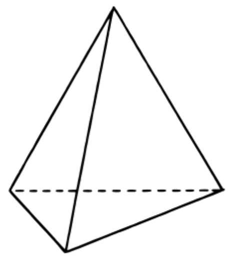
Altura da pirâmide: distância entre o vértice da pirâmide e o plano que contém sua base;

Apótema: altura de uma face lateral com relação à base de uma pirâmide regular.

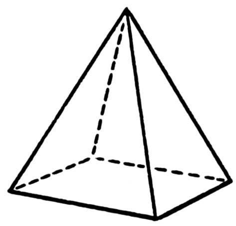
CLASSIFICAÇÃO DE UMA PIRÂMIDE

As pirâmides podem ser classificadas de acordo com o seu número de faces.

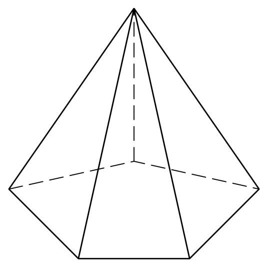
Pirâmide triangular: possui um triângulo como base;



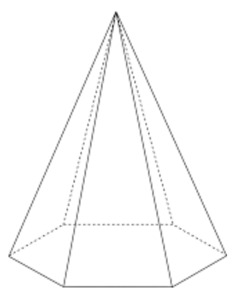
Pirâmide quadrangular: possui um quadrilátero como base;



Pirâmide pentagonal: possui um pentágono como base.



Pirâmide hexagonal: possui um hexágono como base.

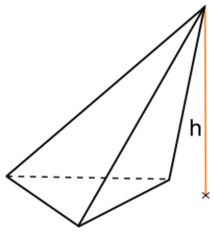


E assim segue a classificação, que depende do número de arestas da base da pirâmide. Vale ressaltar que a pirâmide triangular também é chamada de tetraedro.

Uma pirâmide também pode ser classificada quanto à posição da projeção ortogonal do seu vértice.

Pirâmide Oblíqua

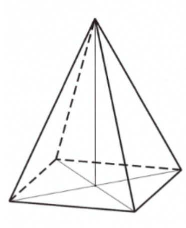
Uma pirâmide é dita oblíqua quando a projeção ortogonal de seu vértice NÃO coincide com o centro do polígono que compõe a sua base.



Observe que na pirâmide oblíqua as faces laterais são triângulos que não necessariamente são iguais.

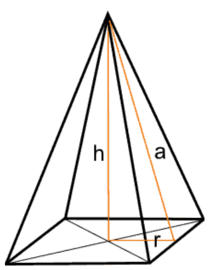
Pirâmide Reta

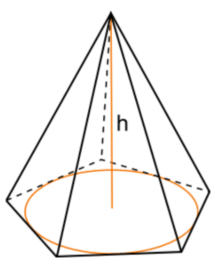
Uma pirâmide é dita reta quando a projeção ortogonal de seu vértice coincide com o centro do polígono que compõe a sua base. Ou ainda, quando o pé da altura coincide com o centro do polígono da base.



Pirâmide Regular

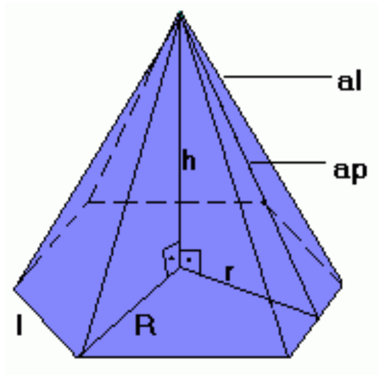
Uma pirâmide é dita regular quando a projeção ortogonal de seu vértice coincide com o centro do polígono que compõe a sua base e esse polígono é regular. Ou ainda, se a base é um polígono regular e o segmento de reta que representa a altura possui o centro da base como segunda extremidade.





Observe que em uma pirâmide regular, as arestas laterais são congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles.

Em qualquer que seja a pirâmide regular, podemos destacar os seguintes elementos:



l é o lado do polígono da base, ou seja, a aresta da base;
h é a altura da pirâmide;
a_l é a aresta lateral da pirâmide;
a_p é o apótema da pirâmide;
r é o raio da circunferência inscrita no polígono da base; e
R é o raio da circunferência circunscrita ao polígono da base.

Alguns desses elementos guardam importantes relações entre si:

$$a_l{}^2 = h^2 + R^2$$

e

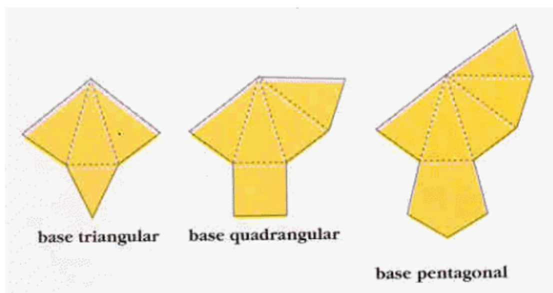
$$a_p{}^2 = h^2 + r^2$$

ÁREAS

A área da superfície lateral é a soma das áreas de todos os triângulos compõem as faces laterais da pirâmide.

A área da base é a área do polígono que compõe a base da pirâmide.

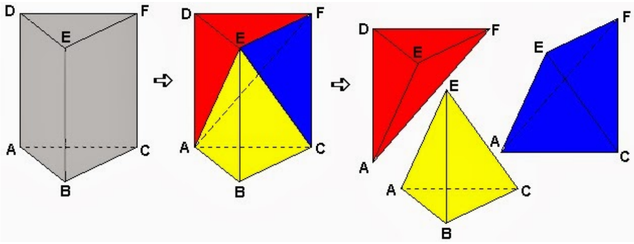
A área da superfície total é a área da superfície lateral somada a área da base da pirâmide.



Comumente, para calcular áreas relacionadas às pirâmides, planificamo-las e analisamos as devidas particularidades, para só assim efetuarmos os cálculos correspondentes.

VOLUME

Para calcular o volume de uma pirâmide, vamos considerar um prisma triangular e decompô-lo em 3 pirâmides triangulares, como mostra na figura:



Observe que a pirâmide vermelha e a amarela tem o mesmo volume, pois as bases DEF e ABC são congruentes, visto que correspondem à base do prisma e possuem a mesma altura, que é própria altura do prisma.

Podemos notar também que a pirâmide vermelha e a azul também tem o mesmo volume. A face FDA na pirâmide vermelha é igual a face FAC na pirâmide azul, posto que a diagonal do retângulo FDAC o divide em dois triângulos congruentes. Como ambos os triângulos estão no mesmo plano, a distância que essas faces se encontram do vértice E é a mesma, logo as pirâmides possuem a mesma base e mesma altura e, portanto, o mesmo volume.

Assim, concluímos que as 3 pirâmides têm o mesmo volume.

$$V_1 = V_2 = V_3 = V_{Pirâmide}$$

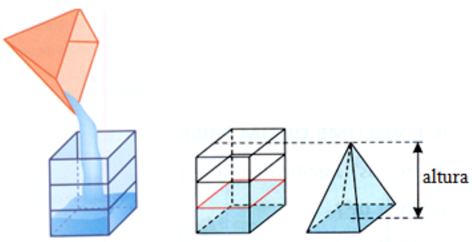
Logo, o volume de cada pirâmide corresponde à terça parte do volume do prisma:

$$V_{Pirâmide} + V_{Pirâmide} + V_{Pirâmide} = V_{Prisma}$$

$$3 \cdot V_{Pirâmide} = V_{Prisma}$$

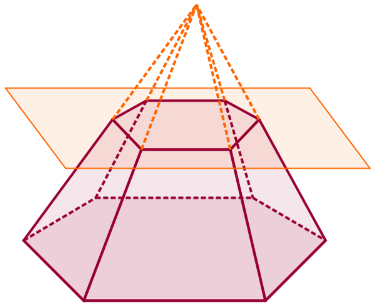
$$V_{Pirâmide} = \frac{V_{Prisma}}{3}$$

$$\boxed{V_{Pirâmide} = \frac{A_b \cdot h}{3}}$$

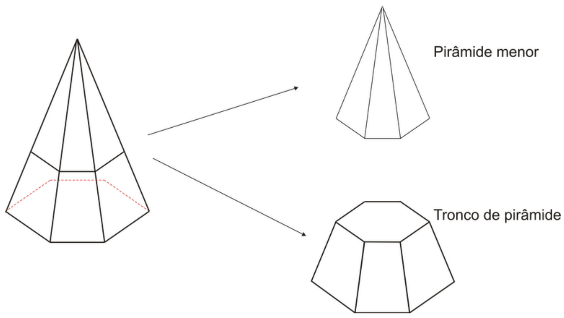


TRONCO DE PIRÂMIDE

O tronco da pirâmide é o sólido formado por uma secção transversal em uma pirâmide. A secção transversal é o corte feito por um plano paralelo à base da pirâmide, como mostra a figura a seguir:

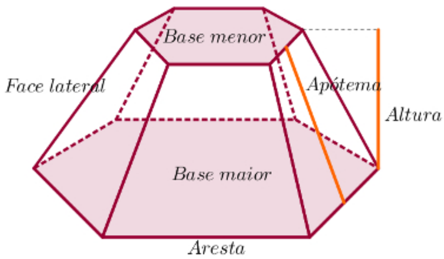


Feita a secção transversal, o conjunto de pontos que fica entre essa secção e a base é o tronco da pirâmide.



Elementos do tronco da pirâmide

Base maior: é a base da pirâmide, o polígono que se opõe ao vértice dela;
Base menor: é o polígono formado pela secção transversal;
Altura: é a distância entre a base maior e a base menor;
Arestas laterais: arestas que conectam a base maior à base menor.
Arestas da base: arestas que contornam os polígonos que formam as bases.
Vértices: ponto de encontro de duas ou mais arestas.
Faces laterais: quadriláteros que compõem a lateral do tronco.
Apótema: altura da face lateral.



O tronco da pirâmide é chamado de tronco regular quando é obtido de uma pirâmide regular.

Para o tronco regular, valem as seguintes propriedades:

- As arestas laterais são congruentes;
- As bases são semelhantes e, além disso, são polígonos regulares;
- Todas as faces laterais são formadas por trapézios isósceles congruentes;
- A altura de uma face lateral qualquer é chamada de apótema.

Área do tronco da pirâmide

A área do tronco da pirâmide é determinada pela soma das áreas de todos os polígonos que o formam. Observe que a base menor e a base maior de um tronco podem ser qualquer polígono, mas as faces laterais são trapézios e, em alguns casos, podem ser até isósceles. Nestes, basta multiplicar o número de lados da base pela área de um dos trapézios isósceles para obter a área lateral do tronco da pirâmide. Depois disso, é necessário calcular a área das bases e, por fim, somar as três áreas.

Assim, a expressão a seguir deve ser usada para calcular a área do tronco da pirâmide:

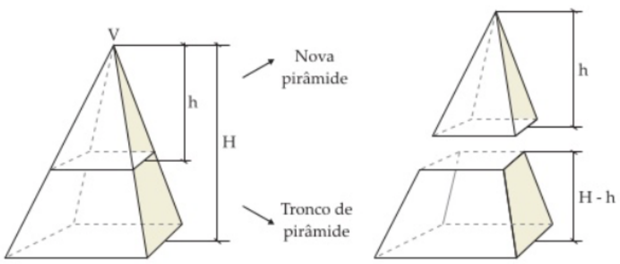
$$A = A_B + A_b + A_l$$

Em que,
A é a área do tronco;
A_B é a área da base maior;
A_b é a área da base menor;
A_l é a área lateral do tronco.

Volume do tronco da pirâmide

O melhor caminho para calcular o volume do tronco de uma pirâmide é subtrair do volume da pirâmide maior o volume da pirâmide menor.

Relações entre as pirâmides semelhantes



Perceba que quando intersectamos a pirâmide grande por um plano paralelo à sua base formamos dois sólidos, uma nova pirâmide menor e o tronco de pirâmide.

A pirâmide menor é semelhante a maior, por isso, valem, linearmente, a relação:

$$\frac{H}{h} = \frac{L}{l} = \frac{a_B}{a_b} = \frac{G}{g} = k$$

Em que,
H é a altura, L é a aresta, a_B é o apótema da base e G é a altura da face da pirâmide maior;
h é a altura, l é a aresta, a_b é o apótema da base e g é a altura da face da pirâmide menor;
E k é a razão de semelhança.

Se pensarmos em área, vale a relação:

$$\frac{A_B}{A_b} = \frac{A_L}{A_l} = k^2$$

Em que,
A_B é a área da base e A_L é a área lateral da pirâmide maior;
A_b é a área da base e A_l é a área lateral da pirâmide menor;
E k é a razão de semelhança.

E, finalmente, pensando em volume, vale:

$$\frac{V}{v} = k^3$$

Em que,
V é o volume da pirâmide maior, v é o volume da pirâmide menor e k é a razão de semelhança.

Também existe uma fórmula pela qual é possível encontrar o volume do tronco, a saber:

$$V = \frac{h_t}{3} \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)$$

Em que,
V é o volume do tronco;
A_B é a área da base maior;
A_b é a área da base menor;
h_t é a altura do tronco.

QUESTÃO 01 – FAC. ALBERT EISTEN 2017

Para a feira cultural da escola, um grupo de alunos irá construir uma pirâmide reta de base quadrada. A pirâmide terá 3m de altura e cada aresta da base medirá 2m. A lateral da pirâmide será coberta com folhas quadradas de papel, que poderão ser cortadas para um melhor acabamento.

Se a medida do lado de cada folha é igual a 20cm, o número mínimo dessas folhas necessárias à execução do trabalho será

Utilize $\sqrt{10} \cong 3{,}2$

Ⓐ 285
Ⓑ 301
Ⓒ 320
Ⓓ 333

QUESTÃO 02 – UFTPR 2017

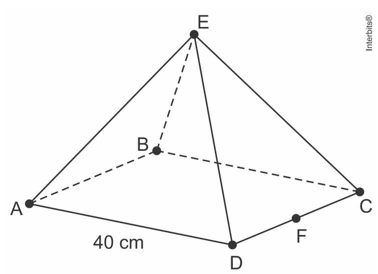
Uma barraca de camping foi projetada com a forma de uma pirâmide de altura 3 metros, cuja base é um hexágono regular de lados medindo 2 metros.

Assim, a área da base e o volume desta barraca medem, respectivamente:

Ⓐ $6\sqrt{3}\ m^2$ e $6\sqrt{3}\ m^3$.
Ⓑ $3\sqrt{3}\ m^2$ e $3\sqrt{3}\ m^3$.
Ⓒ $5\sqrt{3}\ m^2$ e $2\sqrt{3}\ m^3$.
Ⓓ $2\sqrt{3}\ m^2$ e $5\sqrt{3}\ m^3$.
Ⓔ $4\sqrt{3}\ m^2$ e $8\sqrt{3}\ m^3$.

QUESTÃO 03 – UFU 2017

Um designer de jogos virtuais está simulando alguns deslocamentos associados com uma pirâmide quadrangular regular, em que o lado do quadrado da base mede 40cm.



(Figura ilustrativa e sem escalas)

Ele simula a trajetória de um lagarto pelas faces da pirâmide. Inicialmente o lagarto desloca-se de A até E e, posteriormente, de E até F, em que F é o ponto médio de CD. Cada um desses dois trechos da trajetória ocorre em linha reta.

A projeção perpendicular dessa trajetória em ABCD, presente no plano da base da pirâmide, descreve uma curva R, a qual é a união de dois segmentos.

Nessas condições, o comprimento de R, em cm, é igual a

Ⓐ $20\sqrt{2}$
Ⓑ $40\sqrt{2}$
Ⓒ $40(1+\sqrt{2})$
Ⓓ $20(1+\sqrt{2})$

QUESTÃO 04 – ENEM 2016

É comum os artistas plásticos se apropriarem de entes matemáticos para produzirem, por exemplo, formas e imagens por meio de manipulações. Um artista plástico, em uma de suas obras, pretende retratar os diversos polígonos obtidos pelas intersecções de um plano com uma pirâmide regular de base quadrada.

Segundo a classificação dos polígonos, quais deles são possíveis de serem obtidos pelo artista plástico?

Ⓐ Quadrados, apenas.
Ⓑ Triângulos e quadrados, apenas.
Ⓒ Triângulos, quadrados e trapézios, apenas.
Ⓓ Triângulos, quadrados, trapézios e quadriláteros irregulares, apenas.
Ⓔ Triângulos, quadrados, trapézios, quadriláteros irregulares e pentágonos, apenas.

QUESTÃO 05 – UECE 2016

Se a soma dos ângulos de todas as faces de uma pirâmide (incluindo a base) é 3600 graus, então, a base da pirâmide é um polígono com

Ⓐ 9 lados.
Ⓑ 10 lados.
Ⓒ 11 lados.
Ⓓ 12 lados.

QUESTÃO 06 – ACAFE 2016

Uma peça de madeira tem a forma de uma pirâmide hexagonal regular com 21cm de altura. Essa peça é seccionada por um plano paralelo à base, de forma que o volume da pirâmide obtida seja 8/27 do volume da pirâmide original.

A distância (em cm) da base da pirâmide até essa secção é um número:

Ⓐ fracionário.
Ⓑ primo.
Ⓒ múltiplo de 3.
Ⓓ quadrado perfeito.

QUESTÃO 07 – UDESC 2015

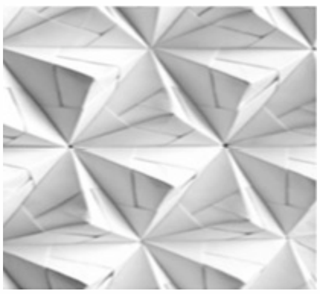
Em uma escola foi proposta uma gincana. De acordo com as regras da gincana, o vencedor de uma das provas seria aquele que chegasse mais próximo do número de sólidos existentes dentro de um pote. Neste pote, com formato de prisma triangular regular, medindo 50cm de altura e lado do triângulo da base com 40cm, foi colocada a mesma quantidade de cubos, pirâmides regulares de base triangular e pirâmides regulares de base quadrangular. Informou-se aos participantes que a altura das pirâmides triangulares é de 3cm e que a altura das pirâmides quadrangulares é igual à altura dos cubos. Sabe-se, também, que as arestas dos cubos medem $2\sqrt{3}\,\text{cm}$; as arestas da base das pirâmides triangulares medem 4cm e as arestas da base das pirâmides quadrangulares equivalem à metade das arestas dos cubos. Com base nessas informações, João, um dos participantes da gincana, considerou que uma boa estimativa seria fazer os cálculos como se os sólidos preenchessem o máximo possível do pote, deixando a menor quantidade possível de espaços.

Nesse caso, João respondeu que o número de sólidos dentro do pote é de:

Ⓐ 2001
Ⓑ 1248
Ⓒ 1998
Ⓓ 1251
Ⓔ 2015

QUESTÃO 08 – UEPA 2015

A arte é uma forma de expressão da racionalidade humana. O origami é uma técnica japonesa baseada em juntar módulos individuais de papel dobrando para criar prismas e cubos, conforme ilustra a figura abaixo.



Fonte: http://noticias.br.msn.com/fotos/escocesa-explora-varia%c3%a7%c3%b5es-tonais-de-luz-sobre-papel-em-esculturas-de-origami-2?page=2#image=2

Todas as pirâmides ilustradas na composição artística acima são tetraedros regulares de base triangular de aresta L = 1dm ligados uns aos outros, por meio de suas arestas e mantendo suas bases sobre um mesmo plano.

Nestas condições, a área total, em dm², de um desses tetraedros regulares é:

Ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{2}$
Ⓑ $\frac{\sqrt{3}}{2}$
Ⓒ $\sqrt{3}$
Ⓓ $2\sqrt{2}$
Ⓔ $2\sqrt{3}$

QUESTÃO 09 – UFSM 2015

Desde a descoberta do primeiro plástico sintético da história, esse material vem sendo aperfeiçoado e aplicado na indústria. Isso se deve ao fato de o plástico ser leve, ter alta resistência e flexibilidade. Uma peça plástica usada na fabricação de um brinquedo tem a forma de uma pirâmide regular quadrangular em que o apótema mede 10mm e a aresta da base mede 12mm. A peça possui para encaixe, em seu interior, uma parte oca de volume igual a 78mm³.

O volume, em mm³, dessa peça é igual a

Ⓐ 1152
Ⓑ 1074
Ⓒ 402
Ⓓ 384
Ⓔ 306

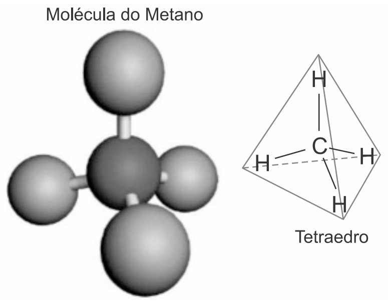
QUESTÃO 10 – UCS 2015

Aumentando-se a medida "a" da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular em 30% e diminuindo- se sua altura "h" em 30%, qual será a variação aproximada no volume da pirâmide?

Ⓐ Aumentará 18%.
Ⓑ Aumentará 30%.
Ⓒ Diminuirá 18%.
Ⓓ Diminuirá 30%.
Ⓔ Não haverá variação.

QUESTÃO 11 – UEL 2015

Na molécula do Metano (CH_4), o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de hidrogênio.



Considerando que as arestas do tetraedro regular medem $6\ \text{cm}$ e que a altura mede $h = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o volume desse tetraedro.

Ⓐ $3\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Ⓑ $18\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

Ⓒ $18\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

Ⓓ $36\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

Ⓔ $54\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

QUESTÃO 12 – IFSUL 2015

Existem variados tipos de blocos de concreto para o uso de contenção às ondas marinhas, em especial o Tetrápode – bloco criado na década de 1950 e utilizado no molhe leste da Barra Cassino (Rio Grande – RS). Constituído em concreto maciço, o bloco é disposto de um eixo central, no qual são tangentes quatro cones alongados (patas) e arredondados, distribuídos igualmente a $120°$ no espaço. Essas "patas" facilitam a conexão entre os blocos, tornando a estrutura mais estável. O centro de gravidade do Tetrápode encontra-se na união das quatro "patas", o que dificulta o balanço e o rolamento da carcaça.

Imagens e Fragmento extraído de "Tipos de blocos de concreto para estrutura hidráulica de proteção às ondas marinhas e análise visual dos Tetrápodes da Barra de Rio Grande" (Adaptado). Disponível em: http://www.semengo.furg.br/2008/45.pdf Acesso: 10 abr. 2015.

Unindo-se as pontas dos eixos das 4 "patas", forma-se um sólido geométrico chamado

Ⓐ Pirâmide Quadrangular Regular.

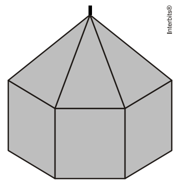
Ⓑ Cilindro Equilátero.

Ⓒ Tetraedro Regular.

Ⓓ Tronco de Pirâmide.

QUESTÃO 13 – INSPER 2014

Uma empresa fabrica porta-joias com a forma de prisma hexagonal regular, com uma tampa no formato de pirâmide regular, como mostrado na figura.



As faces laterais do porta-joias são quadrados de lado medindo 6 cm e a altura da tampa também vale 6 cm. A parte externa das faces laterais do porta-joias e de sua tampa são revestidas com um adesivo especial, sendo necessário determinar a área total revestida para calcular o custo de fabricação do produto.

A área da parte revestida, em cm², é igual a

Ⓐ $72(3+\sqrt{3})$.

Ⓑ $36(6+\sqrt{5})$.

Ⓒ $108(2+\sqrt{5})$.

Ⓓ $27(8+\sqrt{7})$.

Ⓔ $54(4+\sqrt{7})$.

QUESTÃO 14 – UPE 2013

Para a premiação dos melhores administradores de uma galeria comercial, um designer projetou um peso de papel com a forma de um tetraedro regular reto, de aresta 20 cm que será entregue aos vencedores. Esse peso de papel será recoberto com placas de platina, nas faces laterais e com uma placa de prata na base.

Se o preço da platina é de 30 reais por centímetro quadrado, e o da prata é de 50 reais por centímetro quadrado, assinale a alternativa que apresenta o valor mais próximo, em reais, do custo desse recobrimento.

Considere $\sqrt{3} = 1{,}7$

Ⓐ 24 000

Ⓑ 18 000

Ⓒ 16 000

Ⓓ 14 000

Ⓔ 12 000

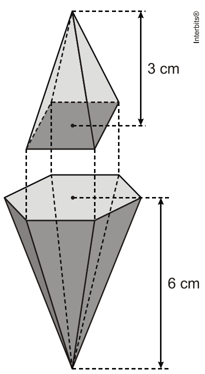
QUESTÃO 15 – UFRGS 2012

Se duplicarmos a medida da aresta da base de uma pirâmide quadrangular regular e reduzirmos sua altura à metade, o volume desta pirâmide

Ⓐ será reduzido à quarta parte.
Ⓑ será reduzido à metade.
Ⓒ permanecerá inalterado.
Ⓓ será duplicado.
Ⓔ aumentará quatro vezes.

QUESTÃO 16 – EPCAR 2012

Um sólido maciço foi obtido quando a base de uma pirâmide hexagonal regular de altura $6\ \text{cm}$ foi colada à base de uma pirâmide reta de base retangular e altura $3\ \text{cm}$, de forma que 4 dos 6 vértices da base da primeira coincidam com os vértices da base da segunda, conforme figura.



Desprezando-se o volume da cola, se a aresta da base da pirâmide hexagonal mede $\sqrt{5}\ \text{cm}$, então, o volume do sólido obtido, em cm^3, é igual a

Ⓐ $15\sqrt{3}$
Ⓑ $20\sqrt{3}$
Ⓒ $25\sqrt{3}$
Ⓓ $30\sqrt{3}$

QUESTÃO 17 – ENEM PPL 2012

O Museu do Louvre, localizado em Paris, na França, é um dos museus mais visitados do mundo. Uma de suas atrações é a Pirâmide de Vidro, construída no final da década de 1980. A seguir tem-se, na Figura 1, uma foto da Pirâmide de Vidro do Louvre.

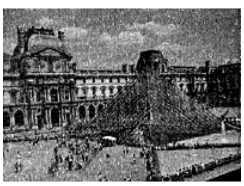


Figura 1

E, na Figura 2, uma pirâmide reta de base quadrada que a ilustra.

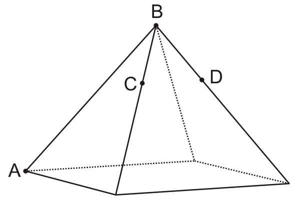


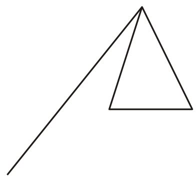
Figura 2

Considere os pontos A, B, C, D como na Figura 2. Suponha que alguns reparos devem ser efetuados na pirâmide. Para isso, uma pessoa fará o seguinte deslocamento:
1) partir do ponto A e ir até o ponto B. deslocando-se pela aresta AB;
2) ir de B até C, deslocando- se pela aresta que contém esses dois pontos;
3) ir de C até D, pelo caminho de menor comprimento;
4) deslocar se de D até B pela aresta que contém esses dois pontos.

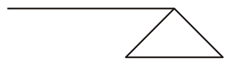
Disponível em: http://viagenslacoste.blogspot.com.
Acesso em: 29 fev. 2012.

A projeção do trajeto da pessoa no plano da base da pirâmide é melhor representada por

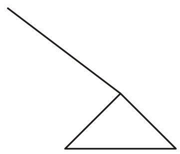
Ⓐ



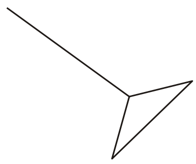
Ⓑ



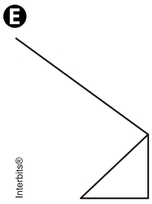
Ⓒ



Ⓓ

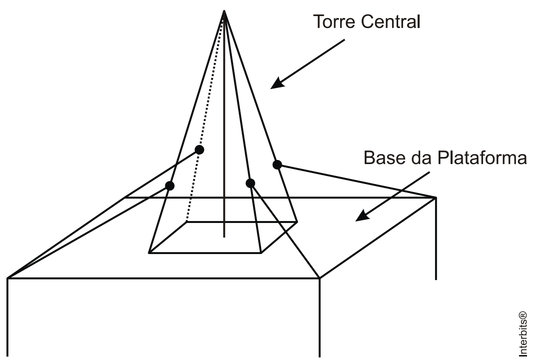


Ⓔ



QUESTÃO 18 – ENEM 2ª APLICAÇÃO 2010

Devido aos fortes ventos, uma empresa exploradora de petróleo resolveu reforçar a segurança de suas plataformas marítimas, colocando cabos de aço para melhor afixar a torre central.
Considere que os cabos ficarão perfeitamente esticados e terão uma extremidade no ponto médio das arestas laterais da torre central (pirâmide quadrangular regular) e a outra no vértice da base da plataforma (que é um quadrado de lados paralelos aos lados da base da torre central e centro coincidente com o centro da base da pirâmide), como sugere a ilustração.

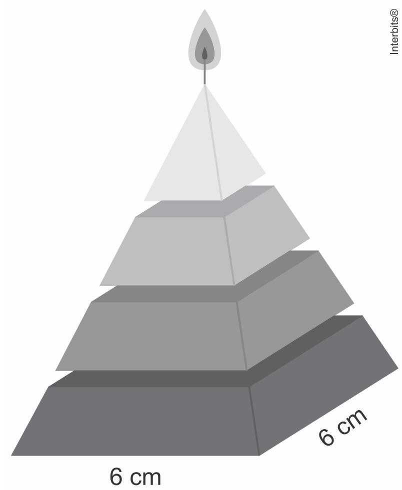


Se a altura e a aresta da base da torre central medem, respectivamente, 24 m e $6\sqrt{2}$ m e o lado da base da plataforma mede $19\sqrt{2}$ m, então a medida, em metros, de cada cabo será igual a

A) $\sqrt{288}$
B) $\sqrt{313}$
C) $\sqrt{328}$
D) $\sqrt{400}$
E) $\sqrt{505}$

QUESTÃO 19 – ENEM 2009

Uma fábrica produz velas de parafina em forma de pirâmide quadrangular regular com 19cm de altura e 6cm de aresta da base. Essas velas são formadas por 4 blocos de mesma altura – 3 troncos de pirâmide de bases paralelas e 1 pirâmide na parte superior –, espaçados de 1cm entre eles, sendo que a base superior de cada bloco é igual à base inferior do bloco sobreposto, com uma haste de ferro passando pelo centro de cada bloco, unindo-os, conforme a figura.



Se o dono da fábrica resolver diversificar o modelo, retirando a pirâmide da parte superior, que tem 1,5cm de aresta na base, mas mantendo o mesmo molde, quanto ele passará a gastar com parafina para fabricar uma vela?

A) $156\ cm^3$.
B) $189\ cm^3$.
C) $192\ cm^3$.
D) $216\ cm^3$.
E) $540\ cm^3$.

QUESTÃO 20 – ENEM 2009

Um artesão construiu peças de artesanato interceptando uma pirâmide de base quadrada com um plano. Após fazer um estudo das diferentes peças que poderia obter, ele concluiu que uma delas poderia ter uma das faces pentagonal.

Qual dos argumentos a seguir justifica a conclusão do artesão?

Ⓐ Uma pirâmide de base quadrada tem 4 arestas laterais e a interseção de um plano com a pirâmide intercepta suas arestas laterais. Assim, esses pontos formam um polígono de 4 lados.
Ⓑ Uma pirâmide de base quadrada tem 4 faces triangulares e, quando um plano intercepta essa pirâmide, divide cada face em um triângulo e um trapézio. Logo, um dos polígonos tem 4 lados.
Ⓒ Uma pirâmide de base quadrada tem 5 faces e a interseção de uma face com um plano é um segmento de reta. Assim, se o plano interceptar todas as faces, o polígono obtido nessa interseção tem 5 lados.
Ⓓ O número de lados de qualquer polígono obtido como interseção de uma pirâmide com um plano é igual ao número de faces da pirâmide. Como a pirâmide tem 5 faces, o polígono tem 5 lados.
Ⓔ O número de lados de qualquer polígono obtido interceptando-se uma pirâmide por um plano é igual ao número de arestas laterais da pirâmide. Como a pirâmide tem 4 arestas laterais, o polígono tem 4 lados.

QUESTÃO 21 – CFTMG 2008

Um faraó projetou uma pirâmide de 100m de altura, cuja base é um quadrado de lado 100 m, dentro da qual estaria seu túmulo. Para edificar $1000m^3$ a mão de obra escrava gastava, em média, 72 dias.

Nessas condições, o tempo necessário, em anos, para a construção dessa pirâmide foi, aproximadamente,

Ⓐ 76
Ⓑ 66
Ⓒ 56
Ⓓ 46

QUESTÃO 22 – FUVEST 2003

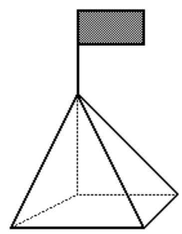
Um telhado tem a forma da superfície lateral de uma pirâmide regular, de base quadrada. O lado da base mede 8m e a altura da pirâmide 3m. As telhas para cobrir esse telhado são vendidas em lotes que cobrem $1m^2$.

Supondo que possa haver 10 lotes de telhas desperdiçadas (quebras e emendas), o número mínimo de lotes de telhas a ser comprado é:

Ⓐ 90
Ⓑ 100
Ⓒ 110
Ⓓ 120
Ⓔ 130

QUESTÃO 23 – UNESP 2002

O prefeito de uma cidade pretende colocar em frente à prefeitura um mastro com uma bandeira, que será apoiado sobre uma pirâmide de base quadrada feita de concreto maciço, como mostra a figura.



Sabendo-se que a aresta da base da pirâmide terá 3 m e que a altura da pirâmide será de 4 m, o volume de concreto (em m^3) necessário para a construção da pirâmide será

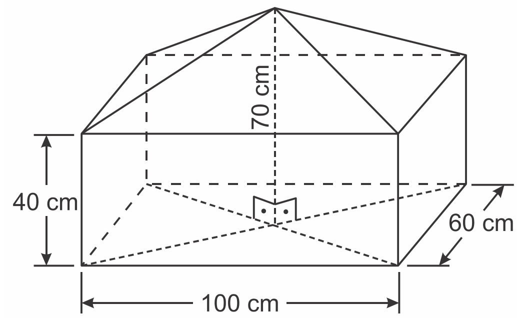
Ⓐ 36.
Ⓑ 27.
Ⓒ 18.
Ⓓ 12.
Ⓔ 4.

QUESTÃO 24 – UERJ 2002

Leia os quadrinhos:

(*O Globo*, março 2000)

Suponha que o volume de terra acumulada no carrinho de mão do personagem seja igual ao do sólido esquematizado na figura a seguir, formado por uma pirâmide reta sobreposta a um paralelepípedo retângulo.



Assim, o volume médio de terra que Hagar acumulou em cada ano de trabalho é, em dm^3, igual a:

A 12
B 13
C 14
D 15

QUESTÃO 25 – UERJ 2000

A figura abaixo representa o brinquedo Piramix.

Ele tem a forma de um tetraedro regular, com cada face dividida em 9 triângulos equiláteros congruentes.

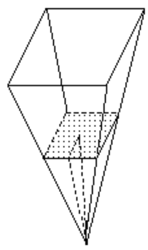
Se, a partir de cada vértice, for retirada uma pirâmide regular cuja aresta é $\frac{1}{3}$ da aresta do brinquedo, restará um novo sólido.

A razão entre as superfícies totais desse sólido e do Piramix equivale a:

A $\frac{4}{9}$
B $\frac{5}{9}$
C $\frac{7}{9}$
D $\frac{8}{9}$

QUESTÃO 26 – UFSM 1999

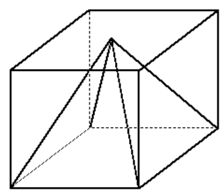
Um técnico agrícola utiliza um pluviômetro na forma de pirâmide quadrangular, para verificar o índice pluviométrico de uma certa região.



A água, depois de recolhida, é colocada num cubo de 10 cm de aresta. Se, na pirâmide, a água atinge uma altura de 8 cm e forma uma pequena pirâmide de 10 cm de apótema lateral, então a altura atingida pela água no cubo é de

A 2,24 cm
B 2,84 cm
C 3,84 cm
D 4,24 cm
E 6,72 cm

QUESTÃO 27 – UNIRIO 1998



Uma pirâmide está inscrita num cubo, como mostra a figura anterior.

Sabendo-se que o volume da pirâmide é de 6 m^3, então, o volume do cubo, em m^3, é igual a:

A 9
B 12
C 15
D 18
E 21

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	C
02	A
03	D
04	E
05	C
06	B
07	C
08	C
09	E
10	A
11	B
12	C
13	E
14	A
15	D
16	B
17	C
18	D
19	B
20	C
21	B
22	A
23	D
24	D
25	C
26	C
27	D

GEOMETRIA ESPACIAL

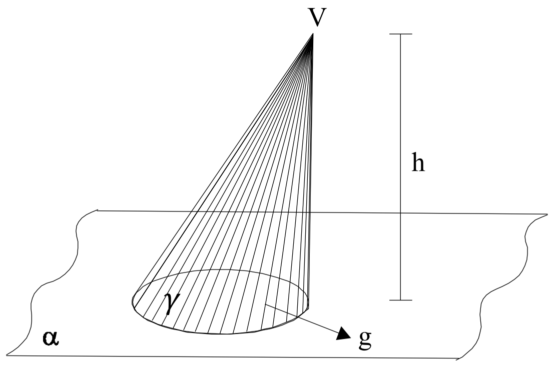
CONES

ANDERSON
MATEMÁTICA

CONES

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Seja um plano α, um ponto $V \notin \alpha$ e um círculo γ contido em α. Chama-se cone circular a reunião de todos os segmentos de reta com uma extremidade em V e a outra nos pontos do círculo γ considerado.



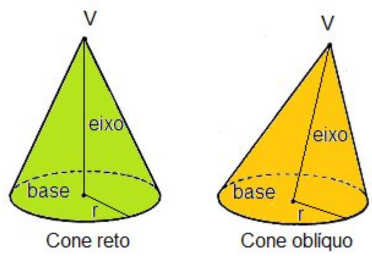
No cone circular da figura têm-se os seguintes elementos:

Vértice: É o ponto V citado na definição.

Base: É o círculo γ citado na definição

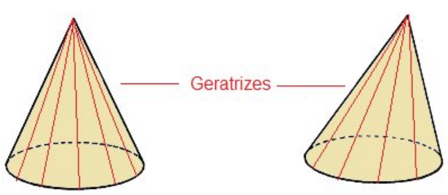
Altura: É a distância h do vértice ao plano da base.

Eixo: É a reta que passa por V e pelo centro da circunferência γ.



Quando o eixo do cone é perpendicular ao plano da base, dizemos que o cone é reto, caso contrário, o cone é dito oblíquo.

Geratrizes: São os segmentos g com uma extremidade em V e a outra nos pontos da circunferência da base.

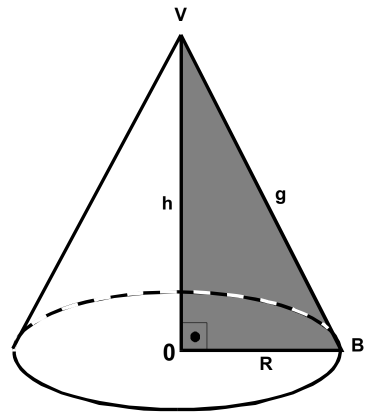


Raio da base: É o raio R do círculo γ citado na definição.

CONE RETO

DEFINIÇÃO E ELEMENTOS

Um cone circular é dito reto quando a projeção ortogonal do vértice sobre o plano da base é o centro da base.



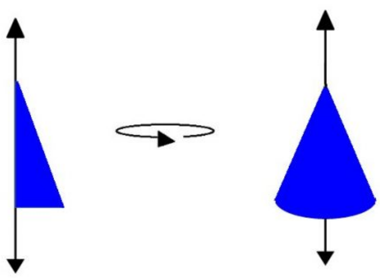
Na figura, temos:

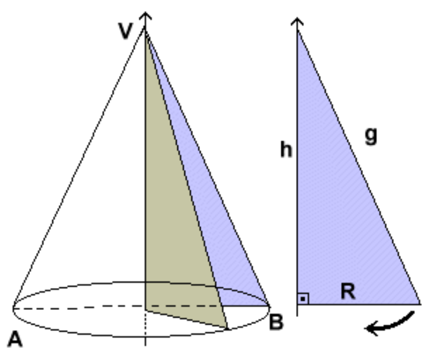
VO = h é altura do cone
OB = R é o raio da base.
VB = g é a geratriz

Como esses três elementos formam um triângulo retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

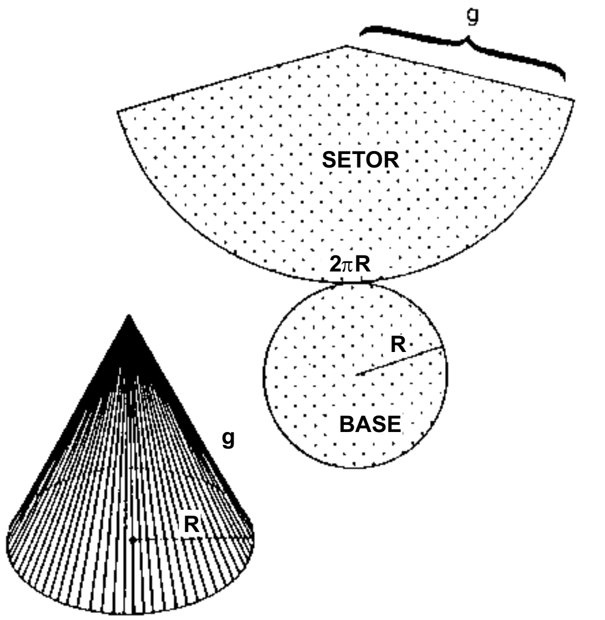
$$g^2 = h^2 + R^2$$

O cone circular reto é também chamado cone de revolução, pois pode ser gerado pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos.





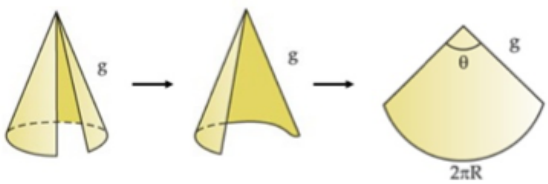
DESENVOLVIMENTO DAS SUPERFÍCIES LATERAL E TOTAL DE UM CONE RETO



A superfície lateral de um cone circular reto de raio da base R e geratriz g é equivalente a um setor circular de raio g, cujo arco tem comprimento $2\pi R$.

ÁREA LATERAL

Existem duas maneiras para calcular a área da superfície lateral do cone reto.



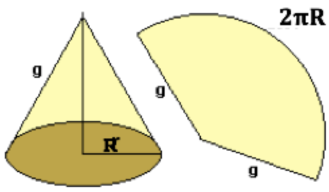
Caso o ângulo θ seja dado, podemos fazer uma regra de três:

	Ângulo	Área
Círculo Completo	360º	πg^2
Setor Circular	θ	A_l

$$360^\circ \cdot A_l = \theta \cdot \pi g^2$$

$$A_l = \frac{\theta}{360^\circ} \cdot \pi g^2$$

Mas, a maneira mais utilizada para calcular a área lateral de um cone circular reto é fazer uma regra de três com o comprimento do arco delimitado pelo setor circular:



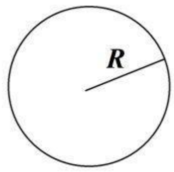
	Comprimento do Arco	Área
Círculo Completo	$2\pi g$	πg^2
Setor Circular	$2\pi R$	A_l

$$2\pi g \cdot A_l = 2\pi R \cdot \pi g^2$$

$$A_l = \frac{2\pi R \cdot \pi g^2}{2\pi g}$$

$$A_l = \pi R g$$

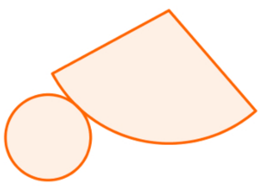
ÁREA DA BASE



Quanto à área da base, o cálculo é um pouco mais simples. Como a base do cone circular reto é um círculo, basta calcularmos a área do círculo:

$$A_b = \pi R^2$$

ÁREA TOTAL



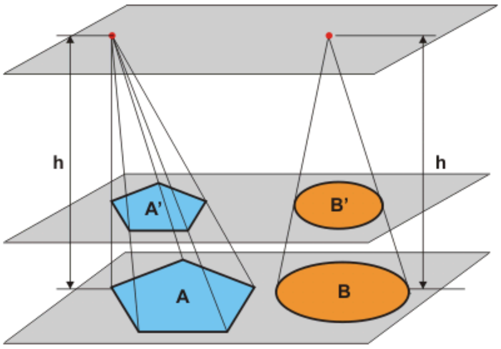
A área total é dada pela soma da área lateral com a área da base:

$$A_t = A_l + A_b$$

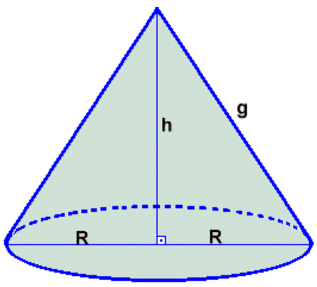
$$A_t = \pi R g + \pi R^2$$

$$A_t = \pi R (g + R)$$

VOLUME DO CONE CIRCULAR RETO



O Princípio de Cavalieri nos diz que sólidos de mesma altura com áreas de secções transversais correspondentes equivalentes possuem o mesmo volume, portanto, o cálculo do volume do cone é análogo ao da pirâmide.

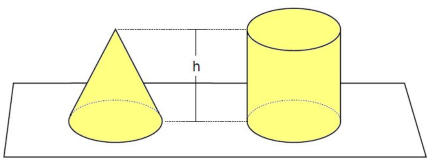


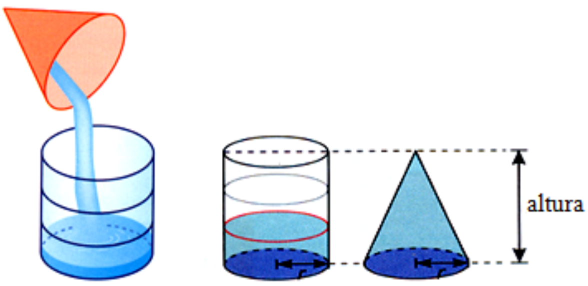
$$V_{Cone} = V_{Pirâmide}$$

$$V_{Cone} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

$$V_{Cone} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

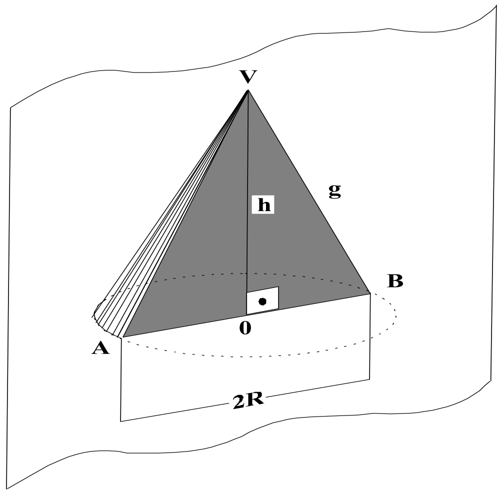
Ainda pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro de mesma área da base e mesma altura:





SECÇÃO MERIDIANA

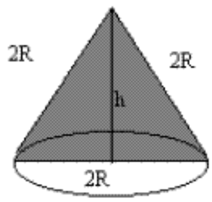
É a intersecção do cone reto com um plano que contém a reta VO (eixo de rotação). A secção meridiana de um cone circular reto é um triângulo isósceles de base *2R* e altura *h*, que na figura é representada pelo triângulo VAB.



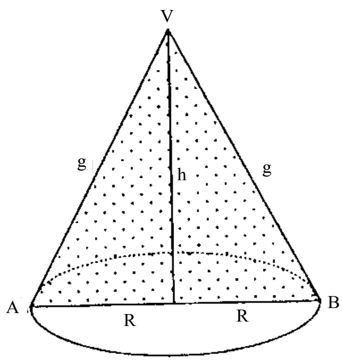
Quando a secção meridiana de um cone reto é um triângulo equilátero, o cone é dito cone equilátero.

CONE EQUILÁTERO

Como a secção meridiana do cone equilátero é um triângulo equilátero, a geratriz do cone deve ser igual ao diâmetro da base do cone:



No cone equilátero da figura, tem-se AB = AV = BV.



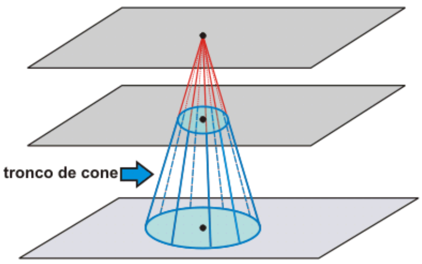
Assim:

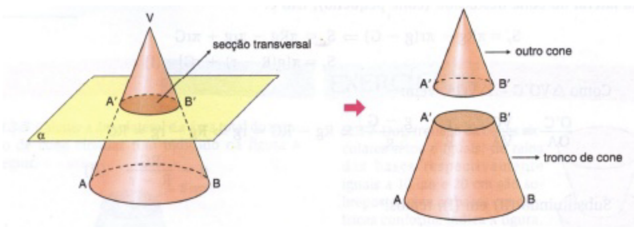
$$g = 2R$$

$$h = R\sqrt{3}$$

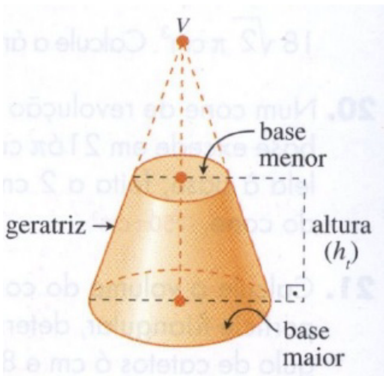
TRONCO DE CONE RETO

Seccionando-se um cone por um plano paralelo à base do mesmo, obtêm-se dois sólidos: um novo cone e um tronco de cone de bases paralelas.



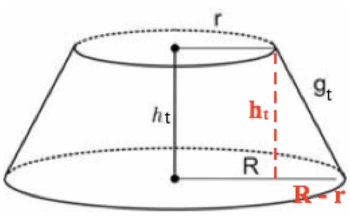


ELEMENTOS DO TRONCO DE CONE RETO



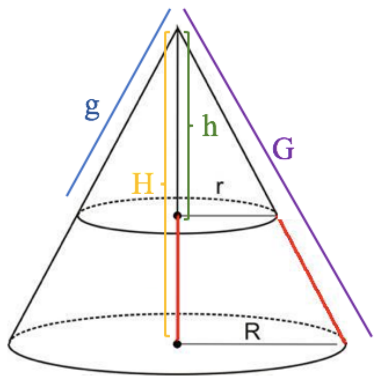
Um tronco de cone reto terá:
Uma **base menor** de raio r;
Uma **base maior** de raio R;
A **Geratriz** g_t;
E a **altura** h_t.

Perceba que em um tronco de cone reto, podemos aplicar o teorema de Pitágoras, obtendo a seguinte relação:



$$g_t{}^2 = h_t{}^2 + (R - r)^2$$

VOLUME DO TRONCO DE CONE RETO



A secção transversal de um cone reto gera um cone menor que é semelhante ao cone original. Essa semelhança nos permite fazer uso de algumas relações:

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{G}{g} = k$$

Em que,
H é a altura, R é raio da base e G é a geratriz do cone maior;
h é a altura, r é raio da base e g é a geratriz do cone menor;
E k é a razão de semelhança.

Se pensarmos em área, vale a relação:

$$\frac{A_B}{A_b} = \frac{A_L}{A_l} = \frac{A_T}{A_t} = k^2$$

Em que,
A_B é a área da base, A_L é a área lateral e A_T é a área total do cone maior;
A_b é a área da base, A_l é a área lateral e A_t é a área total do cone menor;
E k é a razão de semelhança.

E, finalmente, pensando em volume, vale:

$$\frac{V}{v} = k^3$$

Em que,
V é o volume do cone maior, v é o volume do cone menor e k é a razão de semelhança.

Através dessas relações, podemos encontrar o volume do tronco de cone reto:

$$V_t = V - v$$

Em que, V_t é o volume do tronco de cone reto, V é o volume do cone maior e v é o volume do cone menor.

Também existe uma fórmula, análoga a que vimos para o tronco de pirâmide, pela qual é possível encontrar o volume do tronco, a saber:

$$V = \frac{h_t}{3} \cdot \left(A_B + \sqrt{A_B \cdot A_b} + A_b\right)$$

Em que,
V é o volume do tronco;
A_B é a área da base maior;
A_b é a área da base menor;
h_t é a altura do tronco.

Como as bases dos cones são círculos, temos:

$$V = \frac{h_t}{3} \cdot \left(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right)$$

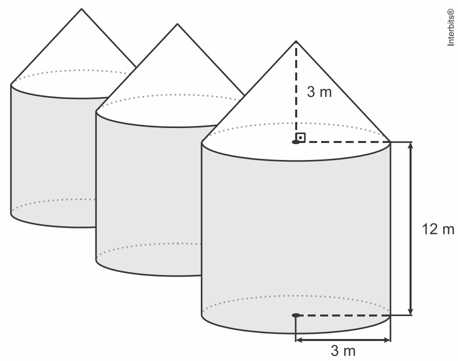
$$V = \frac{h_t}{3} \cdot (\pi R^2 + \pi R r + \pi r^2)$$

$$V = \frac{h_t \cdot \pi}{3} \cdot (R^2 + Rr + r^2)$$

QUESTÕES DE CONE NO ENEM

QUESTÃO 01 – ENEM 2016

Em regiões agrícolas, é comum a presença de silos para armazenamento e secagem da produção de grãos, no formato de um cilindro reto, sobreposta por um cone, e dimensões indicadas na figura. O silo fica cheio e o transporte dos grãos é feito em caminhões de carga cuja capacidade é de $20\ m^3$. Uma região possui um silo cheio e apenas um caminhão para transportar os grãos para a usina de beneficiamento.



Utilize 3 como aproximação para π.

O número mínimo de viagens que o caminhão precisará fazer para transportar todo o volume de grãos armazenados no silo é

Ⓐ 6.
Ⓑ 16.
Ⓒ 17.
Ⓓ 18.
Ⓔ 21.

QUESTÃO 02 – ENEM PPL 2015

Ao se perfurar um poço no chão, na forma de um cilindro circular reto, toda a terra retirada é amontoada na forma de um cone circular reto, cujo raio da base é o triplo do raio do poço e a altura é 2,4 metros. Sabe-se que o volume desse cone de terra é 20% maior do que o volume do poço cilíndrico, pois a terra fica mais fofa após ser escavada.

Qual é a profundidade, em metros, desse poço?

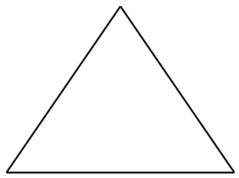
Ⓐ 1,44
Ⓑ 6,00
Ⓒ 7,20
Ⓓ 8,64
Ⓔ 36,00

QUESTÃO 03 – ENEM 2014

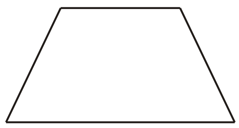
Um sinalizador de trânsito tem o formato de um cone circular reto. O sinalizador precisa ser revestido externamente com adesivo fluorescente, desde sua base (base do cone até a metade de sua altura, para sinalização noturna. O responsável pela colocação do adesivo precisa fazer o corte do material de maneira que a forma do adesivo corresponda exatamente à parte da superfície lateral a ser revestida.

Qual deverá ser a forma do adesivo?

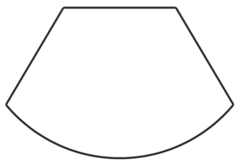
A



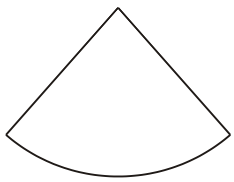
B



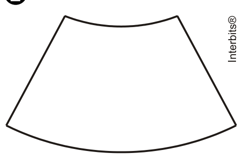
C



D

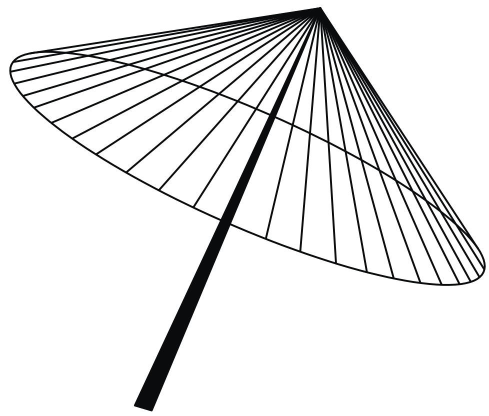


E



QUESTÃO 04 – ENEM 2011

A figura seguinte mostra um modelo de sombrinha muito usado em países orientais.



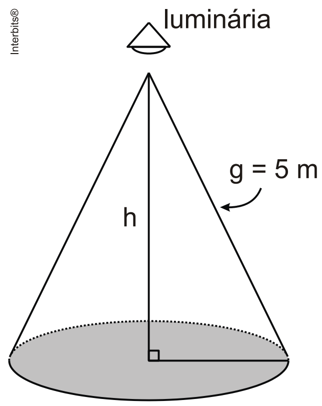
Disponível em: http://mdmat.psico.ufrgs.br. Acesso em: 1 maio 2010.

Esta figura é uma representação de uma superfície de revolução chamada de

A pirâmide.
B semiesfera.
C cilindro.
D tronco de cone.
E cone.

QUESTÃO 05 – ENEM 2010 (2ª aplicação)

Um arquiteto está fazendo um projeto de iluminação de ambiente e necessita saber a altura que deverá instalar a luminária ilustrada na figura



Sabendo-se que a luminária deverá iluminar uma área circular de $28,26 m^2$, considerando $\pi \cong 3,14$, a altura h será igual a

A 3 m.
B 4 m.
C 5 m.
D 9 m.
E 16 m.

QUESTÃO 06 – ENEM 2009 Cancelado

Um vasilhame na forma de um cilindro circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 30 cm está parcialmente ocupado por $625\pi\,cm^3$ de álcool. Suponha que sobre o vasilhame seja fixado um funil na forma de um cone circular reto de raio da base de 5 cm e altura de 6 cm, conforme ilustra a figura 1. O conjunto, como mostra a figura 2, é virado para baixo, sendo H a distância da superfície do álcool até o fundo do vasilhame.

Volume do cone: $V_{cone} = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

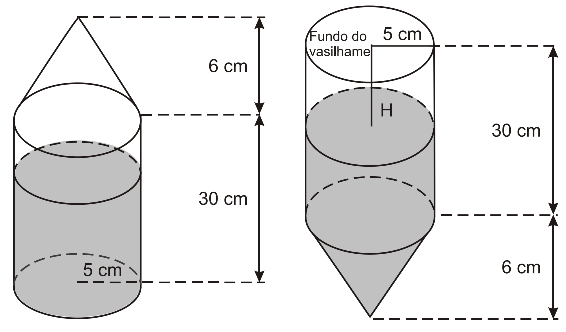


Figura 1 Figura 2

Considerando-se essas informações, qual é o valor da distância H?

Ⓐ 5 cm.
Ⓑ 7 cm.
Ⓒ 8 cm.
Ⓓ 12 cm.
Ⓔ 18 cm.

QUESTÕES DE CONE ESTILO ENEM

QUESTÃO 07 – FMP 2017

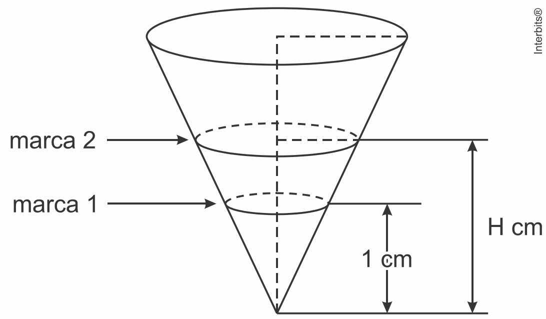
Um recipiente cilíndrico possui raio da base medindo 4 cm e altura medindo $20\text{ cm}.$ Um segundo recipiente tem a forma de um cone, e as medidas do raio de sua base e de sua altura são iguais às respectivas medidas do recipiente cilíndrico.

Qual é a razão entre o volume do recipiente cilíndrico e o volume do recipiente cônico?

Ⓐ $\dfrac{1}{2}$
Ⓑ $\dfrac{1}{5}$
Ⓒ 3
Ⓓ 4
Ⓔ 5

QUESTÃO 08 – UFU 2017

Um recipiente cônico utilizado em experiências de química deve ter duas marcas horizontais circulares, uma situada a 1 centímetro do vértice do cone, marcando um certo volume $v,$ e outra marcando o dobro deste volume, situada a H centímetros do vértice, conforme figura.



Nestas condições, a distância $H,$ em centímetros, é igual a:

Ⓐ $\sqrt[3]{2}$
Ⓑ $\sqrt{3}$
Ⓒ $4/3$
Ⓓ $3/2$

QUESTÃO 09 – FUVEST 2017

Um reservatório de água tem o formato de um cone circular reto. O diâmetro de sua base (que está apoiada sobre o chão horizontal) é igual a $8\text{ m}.$ Sua altura é igual a $12\text{ m}.$ A partir de um instante em que o reservatório está completamente vazio, inicia-se seu enchimento com água a uma vazão constante de 500 litros por minuto.

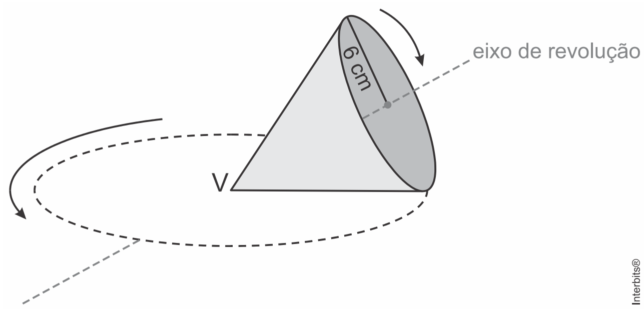
O tempo gasto para que o nível de água atinja metade da altura do reservatório é de, aproximadamente,

Dados:
- π é aproximadamente $3{,}14.$
- O volume V do cone circular reto de altura h e raio da base r é $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h.$

Ⓐ 4 horas e 50 minutos.
Ⓑ 5 horas e 20 minutos.
Ⓒ 5 horas e 50 minutos.
Ⓓ 6 horas e 20 minutos.
Ⓔ 6 horas e 50 minutos.

QUESTÃO 10 – UNESP 2017

Um cone circular reto, de vértice V e raio da base igual a $6\ \text{cm}$, encontra-se apoiado em uma superfície plana e horizontal sobre uma geratriz. O cone gira sob seu eixo de revolução que passa por V, deslocando-se sobre a superfície plana horizontal, sem escorregar, conforme mostra a figura.



O cone retorna à posição inicial após o círculo da sua base ter efetuado duas voltas completas de giro. Considerando que o volume de um cone é calculado pela fórmula $\frac{\pi r^2 h}{3}$, o volume do cone da figura, em cm^3, é igual a

Ⓐ $72\sqrt{3}\pi$
Ⓑ $48\sqrt{3}\pi$
Ⓒ $36\sqrt{3}\pi$
Ⓓ $18\sqrt{3}\pi$
Ⓔ $12\sqrt{3}\pi$

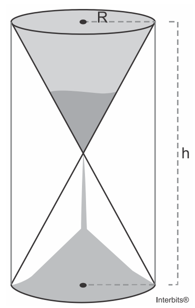
QUESTÃO 11 – IFAL 2016

Girando, em uma volta completa, um triângulo retângulo de catetos $3\ \text{cm}$ e $4\ \text{cm}$, em torno de seu cateto maior, teremos o sólido abaixo com suas características:

Ⓐ pirâmide com área lateral $30\ \text{cm}^2$ e volume $10\ \text{cm}^3$.
Ⓑ cone com área lateral $15\pi\ \text{cm}^2$ e volume $12\pi\ \text{cm}^3$.
Ⓒ cone com área da base $16\pi\ \text{cm}^2$ e volume $12\pi\ \text{cm}^3$.
Ⓓ pirâmide com área da base e área lateral iguais a $12\pi\ \text{cm}^3$.
Ⓔ cone com área da base e área lateral iguais a $15\pi\ \text{cm}^3$.

QUESTÃO 12 – UCS 2016

Uma ampulheta tem a forma de dois cones circulares retos idênticos (mesmo raio e mesma altura no interior de um cilindro circular reto, conforme mostra a figura.

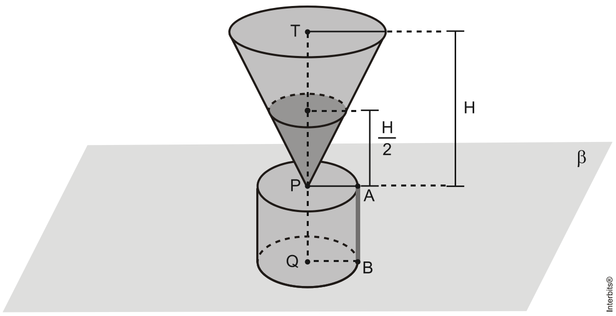


O volume da parte do cilindro sem os dois cones é igual __________ soma dos volumes desses cones. Assinale a alternativa que preenche corretamente a lacuna acima.

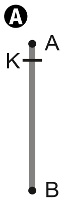
Ⓐ à
Ⓑ ao dobro da
Ⓒ à metade da
Ⓓ a um terço da
Ⓔ a dois terços da

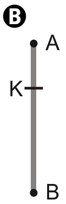
QUESTÃO 13 – UERJ 2015

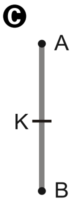
Um funil, com a forma de cone circular reto, é utilizado na passagem de óleo para um recipiente com a forma de cilindro circular reto. O funil e o recipiente possuem a mesma capacidade.
De acordo com o esquema, os eixos dos recipientes estão contidos no segmento TQ, perpendicular ao plano horizontal β.

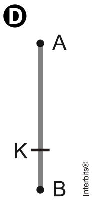


Admita que o funil esteja completamente cheio do óleo a ser escoado para o recipiente cilíndrico vazio. Durante o escoamento, quando o nível do óleo estiver exatamente na metade da altura do funil, $\frac{H}{2}$, o nível do óleo no recipiente cilíndrico corresponderá ao ponto K na geratriz AB.
A posição de K, nessa geratriz, é melhor representada por:

A


B


C


D


QUESTÃO 14 – UEMG 2015

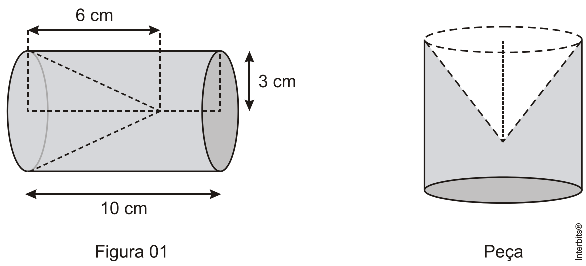
Um reservatório de água, de formato cônico, com raio da tampa circular igual a 8 metros e altura igual a 9 metros, será substituído por outro de forma cúbica, de aresta igual a 10 metros.

Estando o reservatório cônico completamente cheio, ao se transferir a água para o reservatório cúbico, a altura do nível atingida pela água será de (considere $\pi \cong 3$)

A $5,76\,m.$
B $4,43\,m.$
C $6,38\,m.$
D $8,74\,m.$

QUESTÃO 15 – UPE 2014

Um torneiro mecânico construiu uma peça retirando, de um cilindro metálico maciço, uma forma cônica, de acordo com a figura 01 a seguir:



Qual é o volume aproximado da peça em milímetros cúbicos? Considere $\pi \cong 3$

A $2,16 \times 10^5$
B $7,2 \times 10^4$
C $2,8 \times 10^5$
D $8,32 \times 10^4$
E $3,14 \times 10^5$

QUESTÃO 16 – UNIFOR 2014

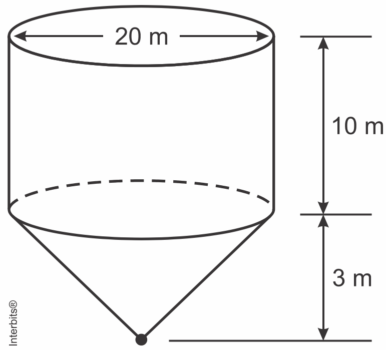
Parte do líquido de um cilindro circular reto que está cheio é transferido para dois cones circulares retos idênticos de mesmo raio e mesma altura do cilindro.

Sabendo-se que os cones ficaram totalmente cheios e que o nível da água que ficou no cilindro é de 3 m, a altura do cilindro é de:

A 5 m
B 6 m
C 8 m
D 9 m
E 12 m

QUESTÃO 17 – IFPE 2014

Um silo para armazenamento de cereais é formado pela junção de um cilindro e um cone com o mesmo raio da base e dimensões internas indicadas na figura a seguir.

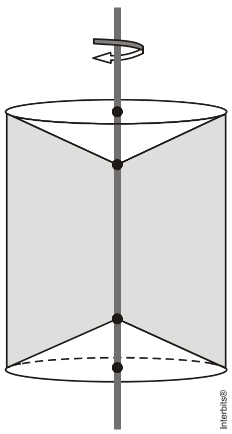


Determine quantos metros cúbicos de cereais podem ser armazenados neste silo. (Adote $\pi = 3{,}14$)

A 3.140
B 3.346
C 3.454
D 3.512
E 3.816

QUESTÃO 18 – UEMG 2014

Uma empresa deseja fabricar uma peça maciça cujo formato é um sólido de revolução obtido pela rotação de um trapézio isósceles em torno da base menor, como mostra a figura a seguir. As dimensões do trapézio são: base maior igual a 15 cm, base menor igual a 7 cm e altura do trapézio igual a 3 cm.



Considerando-se $\pi = 3$, o volume, em litros, da peça fabricada corresponde a

A 0,212.
B 0,333.
C 0,478.
D 0,536.

QUESTÃO 19 – UNIFOR 2014

Um depósito cheio de combustível tem a forma de um cone circular reto. O combustível deve ser transportado por um único caminhão no qual o tanque transportador tem a forma de um cilindro circular reto, cujo raio da base mede metade do raio da base do depósito e altura $\frac{1}{3}$ da altura do depósito.

Quantas viagens o caminhão deverá fazer para esvaziar completamente o depósito, se para cada viagem a capacidade do tanque é preenchida?

A 2
B 3
C 4
D 5
E 6

QUESTÃO 20 – UFRGS 2014

Um cone reto com raio da base medindo 10 cm e altura de 12 cm será seccionado por um plano paralelo à base, de forma que os sólidos resultantes da secção tenham o mesmo volume.

A altura do cone resultante da secção deve, em cm, ser

A 6.
B 8.
C $6\sqrt{2}$.
D $6\sqrt[3]{2}$.
E $6\sqrt[3]{4}$.

QUESTÃO 21 – UNESP 2014

Prato da culinária japonesa, o *temaki* é um tipo de sushi na forma de cone, enrolado externamente com nori, uma espécie de folha feita a partir de algas marinhas, e recheado com arroz, peixe cru, ovas de peixe, vegetais e uma pasta de maionese e cebolinha.

Um *temaki* típico pode ser representado matematicamente por um cone circular reto em que o diâmetro da base mede 8 cm e a altura 10 cm. Sabendo-se que, em um *temaki* típico de salmão, o peixe corresponde a 90% da massa do seu recheio, que a densidade do salmão é de 0,35 g/cm^3, e tomando $\pi = 3$, a quantidade aproximada de salmão, em gramas, nesse *temaki*, é de

Ⓐ 46.
Ⓑ 58.
Ⓒ 54.
Ⓓ 50.
Ⓔ 62.

QUESTÃO 22 – UEL 2013

Considere uma lata, com o formato de um cilindro reto de altura *h cm* e raio *r cm* (Figura 1), completamente cheia de doce de leite. Parte do doce dessa lata foi transferido para dois recipientes (Figura 2), iguais entre si e em forma de cone, que têm a mesma altura da lata e o raio da base igual à metade do raio da base da lata. Considere também que os dois recipientes ficaram completamente cheios de doce de leite.

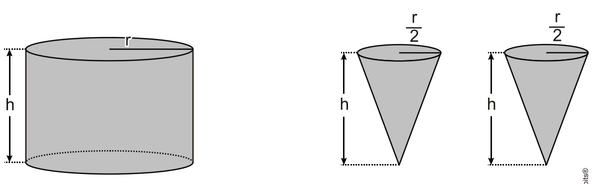


Figura 1 Figura 2

Desprezando a espessura do material de que são feitos os recipientes e a lata, quantos outros recipientes, também em forma de cone, mas com a altura igual à metade da altura da lata e de mesmo raio da lata (Figura 3), podem ser totalmente preenchidos com o doce de leite que restou na lata?

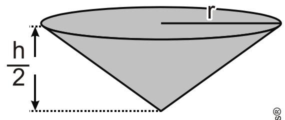


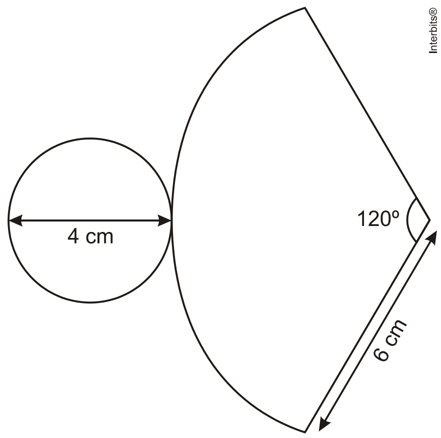
Figura 3

Observação: Na lata e nos recipientes completamente cheios de doce de leite, o doce não excede a altura de cada um deles e, na transferência do doce de leite da lata para os recipientes, não há perda de doce.

Ⓐ 3.
Ⓑ 4.
Ⓒ 5.
Ⓓ 6.
Ⓔ 7.

QUESTÃO 23 – PUCRS 2013

Um desafio matemático construído pelos alunos do Curso de Matemática tem as peças no formato de um cone. A figura abaixo representa a planificação de uma das peças construídas.

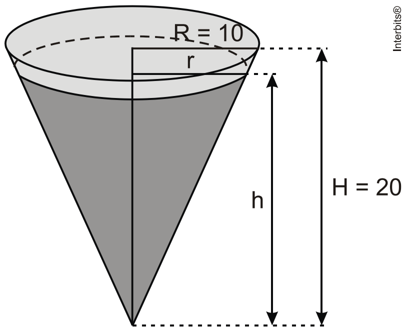


A área dessa peça é de ______ cm^2.

Ⓐ 10π
Ⓑ 16π
Ⓒ 20π
Ⓓ 28π
Ⓔ 40π

QUESTÃO 24 – UFG 2013

Um cone circular reto de madeira, homogêneo, com 20 cm de altura e 20 cm de diâmetro da base, flutua livremente na água parada em um recipiente, de maneira que o eixo do cone fica vertical e o vértice aponta para baixo, como representado na figura a seguir.



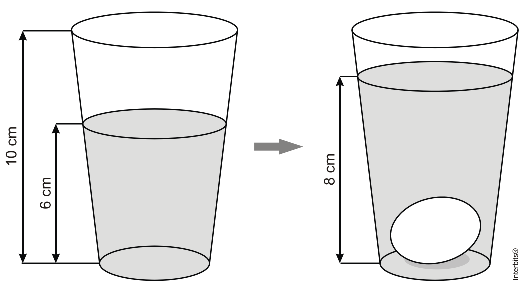
Denotando-se por h a profundidade do vértice do cone, relativa à superfície da água, por r o raio do círculo formado pelo contato da superfície da água com o cone e sabendo-se que as densidades da água e da madeira são 1,0 g/cm³ e 0,6 g/cm³, respectivamente, os valores de r e h, em centímetros, são, aproximadamente:

Dados: $\sqrt[3]{3} \approx 1{,}44$, $\sqrt[3]{5} \approx 1{,}71$.

A) 5,8 e 11,6
B) 8,2 e 18,0
C) 8,4 e 16,8
D) 8,9 e 15,0
E) 9,0 e 18,0

QUESTÃO 25 – CEFETMG 2013

Após mergulhar um ovo em um copo de água de bases (inferior e superior) circulares de diâmetros 4,8 cm e 7,2 cm, respectivamente, um estudante registrou uma elevação no nível de água de 6 cm para 8 cm, tal como mostra a figura seguinte.

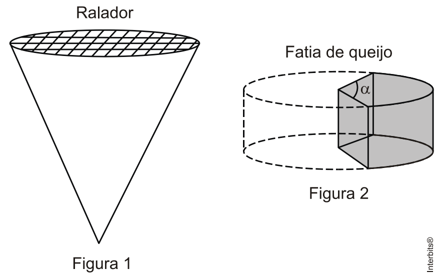


Considerando $\pi = 3$, o volume aproximado do ovo, em cm³, encontra-se no intervalo

A) [0, 25[.
B) [25, 50[.
C) [50, 75[.
D) [75, 100[.
E) [100, 125[.

QUESTÃO 26 – FGV 2012

Um ralador de queijo tem a forma de cone circular reto de raio da base 4 cm e altura 10 cm. O queijo é ralado na base do cone e fica acumulado em seu interior (*figura 1*). Deseja-se retirar uma fatia de um queijo com a forma de cilindro circular reto de raio da base 8 cm e altura 6 cm, obtida por dois cortes perpendiculares à base, partindo do centro da base do queijo e formando um ângulo α (*figura 2*), de forma que o volume de queijo dessa fatia corresponda a 90% do volume do ralador.

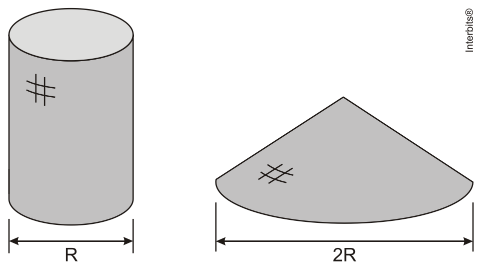


Nas condições do problema, α é igual a

A) 45°.
B) 50°.
C) 55°.
D) 60°.
E) 65°.

QUESTÃO 27 – UNICAMP 2011

Depois de encher de areia um molde cilíndrico, uma criança virou-o sobre uma superfície horizontal. Após a retirada do molde, a areia escorreu, formando um cone cuja base tinha raio igual ao dobro do raio da base do cilindro.

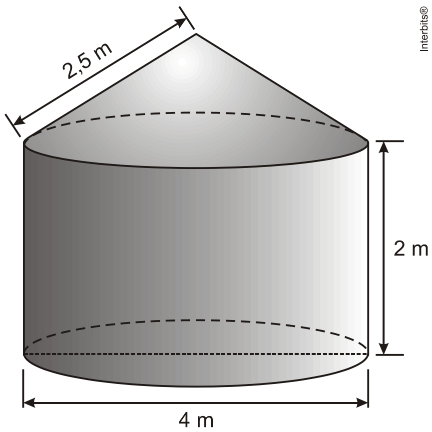


A altura do cone formado pela areia era igual a

A) $\frac{3}{4}$ da altura do cilindro.
B) $\frac{1}{2}$ da altura do cilindro.
C) $\frac{2}{3}$ da altura do cilindro.
D) $\frac{1}{3}$ da altura do cilindro.

QUESTÃO 28 – UFPB 2011

A prefeitura de certo município realizou um processo de licitação para a construção de 100 cisternas de placas de cimento para famílias da zona rural do município. Esse sistema de armazenamento de água é muito simples, de baixo custo e não poluente. A empreiteira vencedora estipulou o preço de 40 reais por m^2 construído, tomando por base a área externa da cisterna. O modelo de cisterna pedido no processo tem a forma de um cilindro com uma cobertura em forma de cone, conforme a figura abaixo.



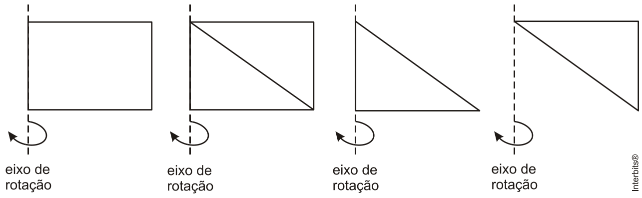
Considerando que a construção da base das cisternas deve estar incluída nos custos, é correto afirmar que o valor, em reais, a ser gasto pela prefeitura na construção das 100 cisternas será, no máximo, de:

Use: $\pi = 3,14$

- Ⓐ 100.960
- Ⓑ 125.600
- Ⓒ 140.880
- Ⓓ 202.888
- Ⓔ 213.520

QUESTÃO 29 – CFTMG 2010

Um aluno gira um retângulo em torno do eixo que contém um de seus lados e calcula o volume **V** do sólido obtido. Depois, ele traça a diagonal do retângulo e o separa em dois triângulos, como mostra a figura.

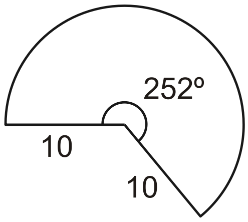


Ao girar cada um dos triângulos, em torno do mesmo eixo de rotação, os volumes dos sólidos obtidos são

- Ⓐ $\frac{1}{3}V$ e $\frac{2}{3}V$
- Ⓑ $\frac{1}{4}V$ e $\frac{3}{4}V$
- Ⓒ $\frac{1}{5}V$ e $\frac{4}{5}V$
- Ⓓ $\frac{1}{6}V$ e $\frac{5}{6}V$

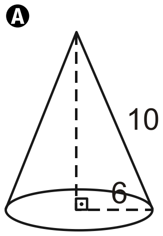
QUESTÃO 30 – FGV 2010

A figura indica a planificação da lateral de um cone circular reto:

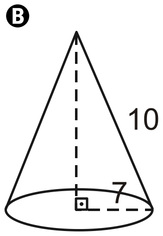


O cone a que se refere tal planificação é

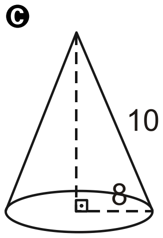
A



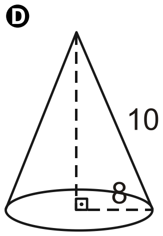
B



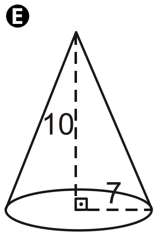
C



D



E



GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	D
02	B
03	E
04	E
05	B
06	B
07	C
08	A
09	C
10	A
11	B
12	B
13	A
14	A
15	A
16	D
17	C
18	B
19	C
20	E
21	D
22	C
23	B
24	C
25	C
26	A
27	A
28	E
29	A
30	B

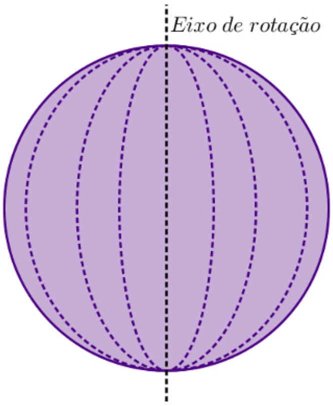
GEOMETRIA ESPACIAL

ESFERAS

ANDERSON
MATEMÁTICA

ESFERA

As esferas são obtidas pelo giro de um semicírculo ao redor do diâmetro, por isso, são chamadas de sólido de revolução.

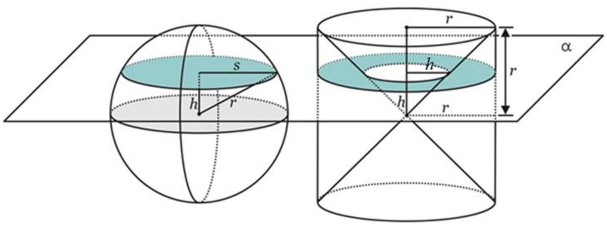


Esfera obtida pelo giro de um semicírculo em torno do seu diâmetro

VOLUME DA ESFERA

Para determinarmos o volume da esfera, usaremos o princípio de Cavalieri, que diz que dois sólidos de mesma altura terão o mesmo volume se suas “fatias correspondentes” tiverem a mesma área.

Do lado esquerdo temos uma esfera de raio *r* e do lado direito temos uma anticlepsidra (cilindro equilátero de raio *r*, subtraído de dois cones de raio *r* e altura *r*).



Perceba que a área da fatia (círculo de raio s verdⒺ da esfera depende da distância h que é feita em relação ao centro da esfera. E que existe uma relação entre s, h e o raio r da esfera.

$$r^2 = s^2 + h^2$$

$$s^2 = r^2 - h^2$$

A área da fatia da esfera será dada por:

$$A_{f1} = \pi s^2$$

$$A_{f1} = \pi(r^2 - h^2)$$

Já a área da fatia da anticlepsidra (coroa circular) é dada por:

$$A_{f2} = \pi r^2 - \pi h^2$$

$$A_{f2} = \pi(r^2 - h^2)$$

Como as áreas das fatias correspondentes da esfera e da anticlepsidra são as mesmas, logo, pelo princípio de Cavalieri, os dois sólidos de mesma altura, terão o mesmo volume.

$$V_{Esfera} = V_{Anticlepsidra}$$

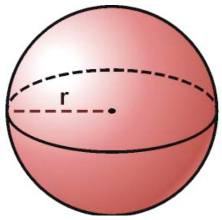
$$V_{Esfera} = V_{Cilindro} - 2V_{Cone}$$

$$V_{Esfera} = \pi r^2 2r - \frac{2\pi r^2 r}{3}$$

$$V_{Esfera} = 2\pi r^3 - \frac{2\pi r^3}{3}$$

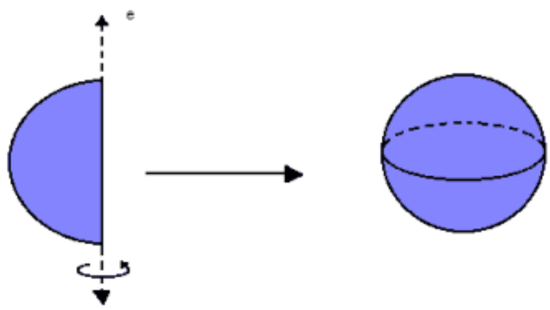
$$V_{Esfera} = \frac{6\pi r^3 - 2\pi r^3}{3}$$

$$\boxed{V_{Esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}}$$



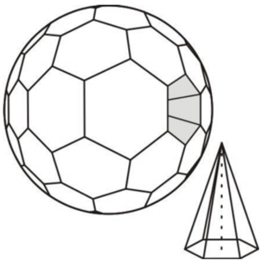
SUPERFÍCIE ESFÉRICA

A parte superficial de uma esfera é, justamente, o conjunto de pontos cuja distância do centro é igual ao raio. Essa superfície pode ser obtida pela rotação de uma semicircunferência em torno do diâmetro.



Para a obtenção da área da superfície de uma esfera, iremos utilizar apenas conceitos básicos de Geometria.

Podemos decompor a esfera em uma infinidade de pirâmides cujas bases compõem a superfície esférica e os vértices se encontram no centro da esfera.



Desta forma, a superfície da esfera fica dividida em N polígonos e a área da superfície esférica A_{SE} é dada por:

$$(1) \quad A_{SE} = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_N$$

Para o Volume da esfera, podemos dizer que é igual à soma dos volumes dessas N por:

$$(2) \quad V_E = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_N$$

Sabemos que o volume de uma pirâmide é dado pela fórmula:

$$(3) \quad V_P = \frac{1}{3} A_b \cdot h$$

No caso destas pirâmides que compõem a esfera, suas alturas são exatamente o raio R da esfera. Assim, a relação (3) fica:

$$(4) \quad V_P = \frac{1}{3} A_b \cdot R$$

e o volume da esfera será a soma dos volumes destas pirâmides:

$$V_E = \frac{A_1 \cdot R}{3} + \frac{A_2 \cdot R}{3} + \frac{A_3 \cdot R}{3} + \cdots + \frac{A_N \cdot R}{3}$$

$$(5) \quad V_E = \frac{R}{3}(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_N)$$

Vejam que a soma das áreas da relação (5) é igual à superfície esférica dada na relação (1). Assim, temos que:

$$(6) \quad V_E = \frac{R}{3} \cdot A_{SE}$$

Partindo do princípio em que já sabemos como calcular o volume da esfera:

$$(7) \quad V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$$

podemos determinar a superfície esférica substituindo a relação (7) em (6), obtendo:

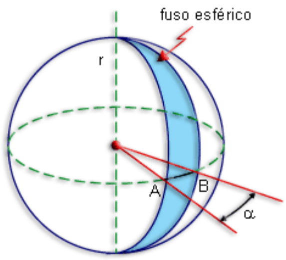
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{R}{3} \cdot A_{SE}$$

$$(8) \quad A_{SE} = 4\pi R^2$$

Vejam que aqui só utilizamos conceitos básicos de Geometria, levando em conta que já sabíamos previamente a fórmula do volume da esfera.

FUSO ESFÉRICO

O fuso esférico é a parte da superfície de uma esfera formada pelo giro de uma semicircunferência em α graus em torno do diâmetro da esfera.



Para encontrarmos a área de um fuso esférico, basta fazermos uma regra de três:

Ângulo	Área
360º	$4\pi R^2$
α	A_{FE}

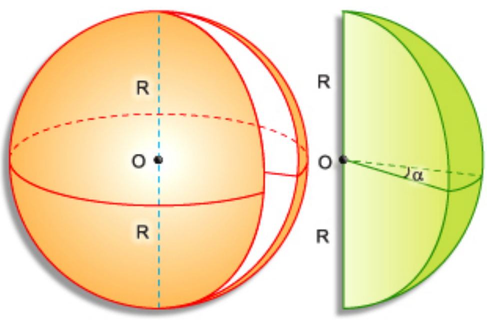
$$360^o \times A_{FE} = 4\alpha\pi R^2$$

$$A_{FE} = \frac{4\alpha\pi R^2}{360^o}$$

$$A_{FE} = \frac{\alpha\pi R^2}{90^o}$$

CUNHA ESFÉRICA

Um semicírculo que gira α graus ao redor de algum eixo forma uma cunha esférica.



O volume da cunha esférica também pode ser calculado por meio de regra de três.

Ângulo	Volume
360^o	$\frac{4\pi R^3}{3}$
α	V_{CE}

$$V_{CE} \times 360^o = \frac{4\alpha\pi R^3}{3}$$

$$V_{CE} = \frac{4\alpha\pi R^3}{3 \times 360^o}$$

$$V_{CE} = \frac{\alpha\pi R^3}{3 \times 90^o}$$

$$\boxed{V_{CE} = \frac{\alpha\pi R^3}{270^o}}$$

QUESTÕES DE ESFERA DO ENEM

QUESTÃO 01 – ENEM 2016 (2ª APLICAÇÃO)

A bocha é um esporte jogado em canchas, que são terrenos planos e nivelados, limitados por tablados perimétricos de madeira. O objetivo desse esporte é lançar bochas, que são bolas feitas de um material sintético, de maneira a situá-las o mais perto possível do bolim, que é uma bola menor feita, preferencialmente, de aço, previamente lançada.

A Figura 1 ilustra uma bocha e um bolim que foram jogados em uma cancha. Suponha que um jogador tenha lançado uma bocha, de raio 5 cm, que tenha ficado encostada no bolim, de raio 2 cm, conforme ilustra a Figura 2.

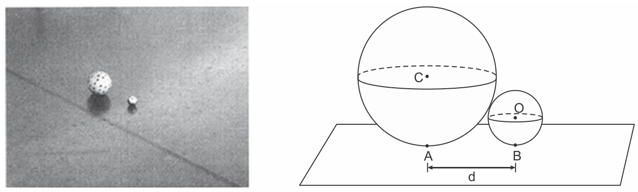


Figura 1 Figura 2

Considere o ponto C como o centro da bocha, e o ponto O como o centro do bolim. Sabe-se que A e B são os pontos em que a bocha e o bolim, respectivamente, tocam o chão da cancha, e que a distância entre A e B é igual a d.

Nessas condições, qual a razão entre d e o raio do bolim?

Ⓐ 1

Ⓑ $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

Ⓒ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ⓓ 2

Ⓔ $\sqrt{10}$

QUESTÃO 02 – ENEM 2016 (2ª APLICAÇÃO)

Uma indústria de perfumes embala seus produtos, atualmente, em frascos esféricos de raio R, com volume dado por $\frac{4}{3}\pi\cdot(R)^3$.

Observou-se que haverá redução de custos se forem utilizados frascos cilíndricos com raio da base $\frac{R}{3}$, cujo volume será dado por $\pi\left(\frac{R}{3}\right)^2\cdot h$, sendo h a altura da nova embalagem.

Para que seja mantida a mesma capacidade do frasco esférico, a altura do frasco cilíndrico (em termos de R) deverá ser igual a

- Ⓐ $2R$.
- Ⓑ $4R$.
- Ⓒ $6R$.
- Ⓓ $9R$.
- Ⓔ $12R$.

QUESTÃO 03 – ENEM 2014

Uma empresa farmacêutica produz medicamentos em pílulas, cada uma na forma de um cilindro com uma semiesfera com o mesmo raio do cilindro em cada uma de suas extremidades. Essas pílulas são moldadas por uma máquina programada para que os cilindros tenham sempre $10\,mm$ de comprimento, adequando o raio de acordo com o volume desejado.

Um medicamento é produzido em pílulas com $5\,mm$ de raio. Para facilitar a deglutição, deseja-se produzir esse medicamento diminuindo o raio para $4\,mm$, e, por consequência, seu volume. Isso exige a reprogramação da máquina que produz essas pílulas.

Use 3 como valor aproximado para π.

A redução do volume da pílula, em milímetros cúbicos, após a reprogramação da máquina, será igual a

- Ⓐ 168.
- Ⓑ 304.
- Ⓒ 306.
- Ⓓ 378.
- Ⓔ 514.

QUESTÃO 04 – ENEM PPL 2014

Para fazer um pião, brinquedo muito apreciado pelas crianças, um artesão utilizará o torno mecânico para trabalhar num pedaço de madeira em formato de cilindro reto, cujas medidas do diâmetro e da altura estão ilustradas na Figura 1. A parte de cima desse pião será uma semiesfera, e a parte de baixo, um cone com altura $4\,cm$, conforme Figura 2. O vértice do cone deverá coincidir com o centro da base do cilindro.

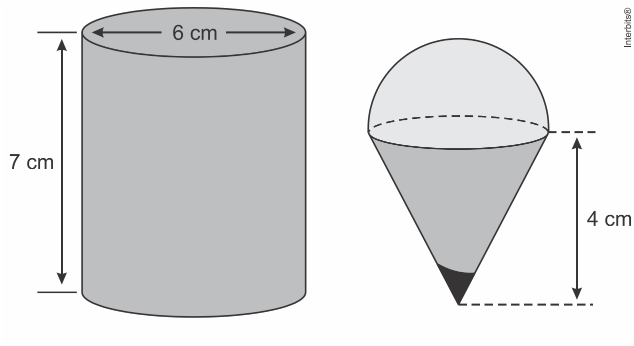


Figura 1 Figura 2

O artesão deseja fazer um pião com a maior altura que esse pedaço de madeira possa proporcionar e de modo a minimizar a quantidade de madeira a ser descartada.

Dados:

O volume de uma esfera de raio r é $\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3$;

O volume do cilindro de altura h e área da base S é $S\cdot h$;

O volume do cone de altura h e área da base S é $\frac{1}{3}\cdot S\cdot h$;

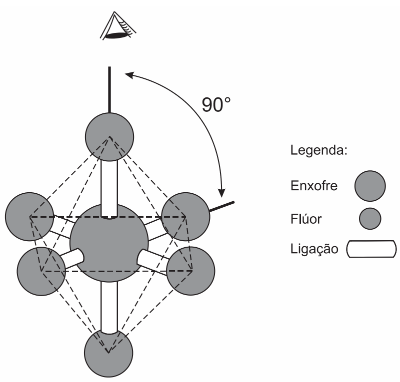
Por simplicidade, aproxime π para 3.

A quantidade de madeira descartada, em centímetros cúbicos, é

- Ⓐ 45.
- Ⓑ 48.
- Ⓒ 72.
- Ⓓ 90.
- Ⓔ 99.

QUESTÃO 05 – ENEM PPL 2014

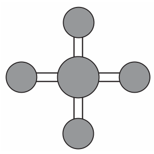
A figura é uma representação tridimensional da molécula do hexafluoreto de enxofre, que tem a forma bipiramidal quadrada, na qual o átomo central de enxofre está cercado por seis átomos de flúor, situados nos seis vértices de um octaedro. O ângulo entre qualquer par de ligações enxofre-flúor adjacentes mede $90°$.



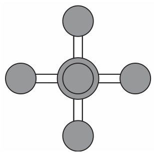
Disponível em: www.portalsaofrancisco.com.br.
Acesso em: 2 mar. 2013 (adaptado).

A vista superior da molécula, como representada na figura, é:

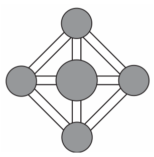
A



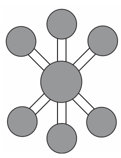
B



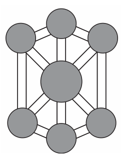
C



D



E



QUESTÃO 06 – ENEM 2012

O globo da morte é uma atração muito usada em circos. Ele consiste em uma espécie de jaula em forma de uma superfície esférica feita de aço, onde motoqueiros andam com suas motos por dentro. A seguir, tem-se, na Figura 1, uma foto de um globo da morte e, na Figura 2, uma esfera que ilustra um globo da morte.

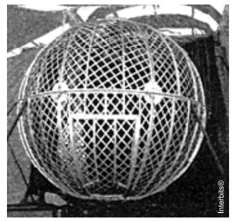


Figura 1

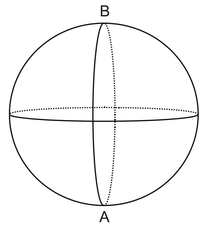


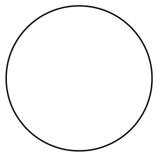
Figura 2

Na Figura 2, o ponto A está no plano do chão onde está colocado o globo da morte e o segmento AB passa pelo centro da esfera e é perpendicular ao plano do chão. Suponha que há um foco de luz direcionado para o chão colocado no ponto B e que um motoqueiro faça um trajeto dentro da esfera, percorrendo uma circunferência que passa pelos pontos A e B.

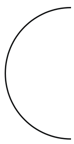
Disponível em: www.baixaki.com.br. Acesso em: 29 fev. 2012.

A imagem do trajeto feito pelo motoqueiro no plano do chão é melhor representada por

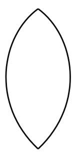
A



B

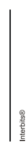


C



D

E



QUESTÃO 07 – ENEM 2010 (2ª APLICAÇÃO)

Se pudéssemos reunir em esferas toda a água do planeta, os diâmetros delas seriam:

1385 km	Toda água do planeta 1,39 bilhões de km³
406 km	Água doce do planeta 35,03 milhões de km³
272 km	Água doce subterrânea 10,53 milhões de km³
58 km	Água doce superficial 104,59 mil km³

Guia do Estudante: Atualidades e Vestibulares+ENEM. Abril: São Paulo, 2009.

A razão entre o volume da esfera que corresponde à água doce superficial e o volume da esfera que corresponde à água doce do planeta é

A) $\frac{1}{343}$

B) $\frac{1}{49}$

C) $\frac{1}{7}$

D) $\frac{29}{136}$

E) $\frac{136}{203}$

QUESTÃO 08 – ENEM 2010

Em um casamento, os donos da festa serviam champanhe aos seus convidados em taças com formato de um hemisfério (Figura 1), porém um acidente na cozinha culminou na quebra de grande parte desses recipientes.
Para substituir as taças quebradas, utilizou-se um outro tipo com formato de cone (Figura 2). No entanto, os noivos solicitaram que o volume de champanhe nos dois tipos de taças fosse igual.

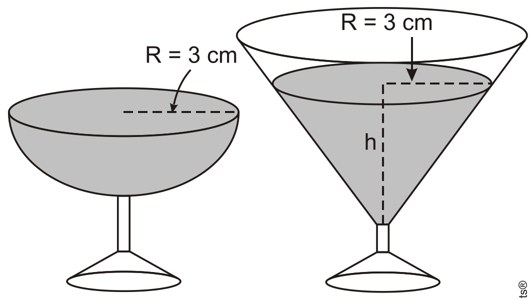


Figura 1 Figura 2

Considere:

$$V_{esfera} = -\frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{e} \quad V_{cone} = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

Sabendo que a taça com o formato de hemisfério e servida completamente cheia, a altura do volume de champanhe que deve ser colocado na outra taça, em centímetros, é de

A) 1,33.
B) 6,00.
C) 12,00.
D) 56,52.
E) 113,04.

QUESTÃO 09 – ENEM CANCELADO 2009

Um artista plástico construiu, com certa quantidade de massa modeladora, um cilindro circular reto cujo diâmetro da base mede 24 cm e cuja altura mede 15 cm. Antes que a massa secasse, ele resolveu transformar aquele cilindro em uma esfera.

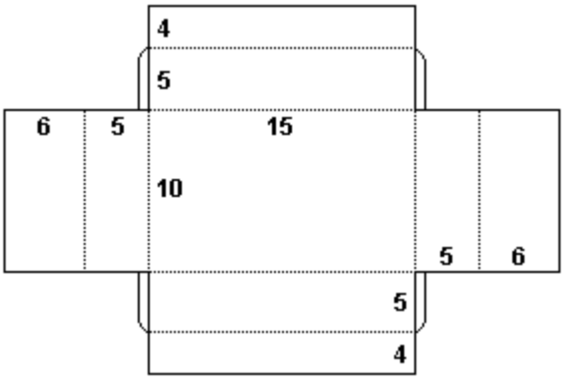
Volume da esfera: $V_{esfera} = \frac{4\pi r^3}{3}$

Analisando as características das figuras geométricas envolvidas, conclui-se que o raio R da esfera assim construída é igual a

A) 15
B) 12
C) 24
D) $\sqrt[3]{60}$
E) $6\sqrt[3]{30}$

QUESTÃO 10 – ENEM 2001

Um fabricante de brinquedos recebeu o projeto de uma caixa que deverá conter cinco pequenos sólidos, colocados na caixa por uma abertura em sua tampa. A figura representa a planificação da caixa, com as medidas dadas em centímetros.



Os sólidos são fabricados nas formas de

I. um cone reto de altura 1 cm e raio da base 1,5 cm.

II. um cubo de aresta 2 cm.

III. uma esfera de raio 1,5 cm.

IV. um paralelepípedo retangular reto, de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm.

V. um cilindro reto de altura 3 cm e raio da base 1 cm.

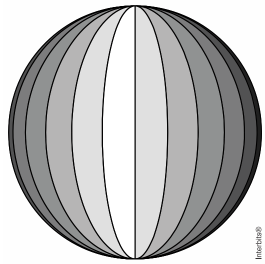
O fabricante não aceitou o projeto, pois percebeu que, pela abertura dessa caixa, só poderia colocar os sólidos dos tipos

Ⓐ I, II e III.
Ⓑ I, II e V.
Ⓒ I, II, IV e V.
Ⓓ II, III, IV e V.
Ⓔ III, IV e V.

QUESTÕES DE ESFERA ESTILO ENEM

QUESTÃO 11 – UDESC 2015

Uma bola esférica é composta por 24 faixas iguais, como indica a figura.

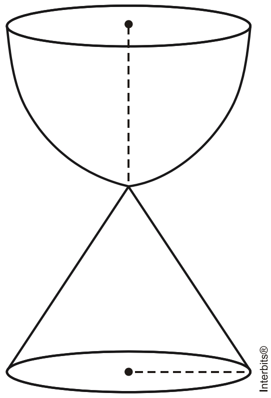


Sabendo-se que o volume da bola é $2304\pi cm^3$, então a área da superfície de cada faixa é de:

Ⓐ $20\pi cm^2$
Ⓑ $24\pi cm^2$
Ⓒ $28\pi cm^2$
Ⓓ $27\pi cm^2$
Ⓔ $25\pi cm^2$

QUESTÃO 11 – CEFETMG 2014

Um artesão resolveu fabricar uma ampulheta de volume total V constituída de uma semiesfera de raio 4 cm e de um cone reto, com raio e altura 4 cm, comunicando-se pelo vértice do cone, de acordo com a figura abaixo.

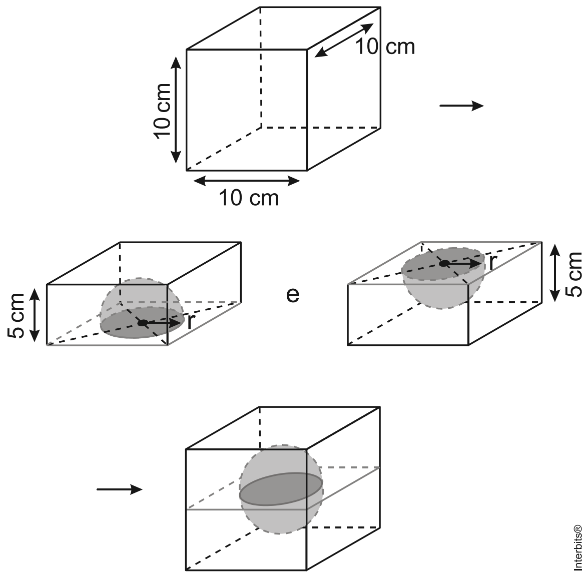


Para seu funcionamento, o artesão depositará na ampulheta areia que corresponda a 25% de V. Portanto o volume de areia, em cm^3, é

Ⓐ 16π.
Ⓑ $\frac{64\pi}{3}$.
Ⓒ 32π.
Ⓓ $\frac{128\pi}{3}$.
Ⓔ 64π.

QUESTÃO 13 – UNESP 2013

Para confeccionar um porta-joias a partir de um cubo maciço e homogêneo de madeira com 10 cm de aresta, um marceneiro dividiu o cubo ao meio, paralelamente às duas faces horizontais. De cada paralelepípedo resultante extraiu uma semiesfera de 4 cm de raio, de modo que seus centros ficassem localizados no cruzamento das diagonais da face de corte, conforme mostra a sequência de figuras.

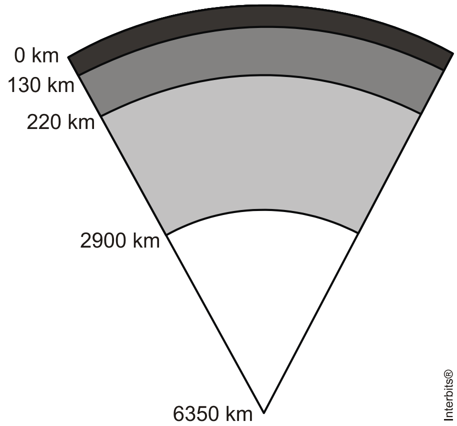


Sabendo que a densidade da madeira utilizada na confecção do porta-joias era de 0,85 g/cm^3 e admitindo $\pi \cong 3$, a massa aproximada do porta-joias, em gramas, é

Ⓐ 636.
Ⓑ 634.
Ⓒ 630.
Ⓓ 632.
Ⓔ 638.

QUESTÃO 14 – UFG 2013

A figura a seguir representa um modelo esquemático aproximado para a estrutura interna da Terra em camadas concêntricas, da superfície ao centro, indicando as profundidades aproximadas das transições entre as camadas.



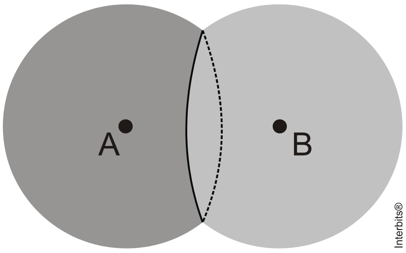
Segundo modelos sísmicos, acredita-se que uma destas camadas é formada, predominantemente, por minerais metálicos, em altas temperaturas, e por duas partes, uma fluida e outra sólida, devido à altíssima pressão. A fração do volume da Terra ocupada por esta camada está entre

Ⓐ $\frac{1}{8}$ e $\frac{1}{5}$
Ⓑ $\frac{1}{5}$ e $\frac{1}{4}$
Ⓒ $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$
Ⓓ $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$
Ⓔ $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$

QUESTÃO 15 – UERJ 2013

Na fotografia abaixo, observam-se duas bolhas de sabão unidas.

Quando duas bolhas unidas possuem o mesmo tamanho, a parede de contato entre elas é plana, conforme ilustra o esquema:



Considere duas bolhas de sabão esféricas, de mesmo raio R, unidas de tal modo que a distância entre seus centros A e B é igual ao raio R. A parede de contato dessas bolhas é um círculo cuja área tem a seguinte medida:

A) $\frac{\pi R^2}{2}$

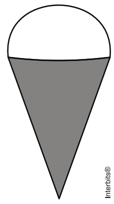
B) $\frac{3\pi R^2}{2}$

C) $\frac{3\pi R^2}{4}$

D) $\frac{4\pi R^2}{3}$

QUESTÃO 16 – UERN 2012

A figura representa um sorvete de casquinha, no qual todo o volume interno está preenchido por sorvete e a parte externa apresenta um volume de meia bola de sorvete.



Considerando que o cone tem 12 cm de altura e raio 6 cm, então o volume total de sorvete é

A) $216\pi\ cm^3$.

B) $360\pi\ cm^3$.

C) $288\pi\ cm^3$.

D) $264\pi\ cm^3$.

QUESTÃO 17 – UFSM 2012

Oscar Niemayer é um arquiteto brasileiro, considerado um dos nomes mais influentes na arquitetura moderna internacional. Ele contribuiu, através de uma doação de um croqui, para a construção do planetário da UFSM, um marco arquitetônico importante da cidade de Santa Maria.

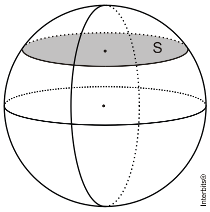
Fonte: arquivo COPERVES.

Suponha que a cobertura da construção seja uma semiesfera de 28 m de diâmetro, vazada por 12 partes iguais, as quais são aproximadas por semicírculos de raio 3 m. Sabendo que uma lata de tinta é suficiente para pintar 39 m² de área, qual a quantidade mínima de latas de tinta necessária para pintar toda a cobertura do planetário? (Use $\pi = 3$)

A) 20.
B) 26.
C) 40.
D) 52.
E) 60.

QUESTÃO 18 – UDESC 2012

Seja S uma seção de uma esfera determinada pela interseção com um plano, conforme figura.



Se S está a $3\ \text{cm}$ do centro da esfera e tem área igual a $16\pi\ \text{cm}^2$, então o volume desta esfera é:

- Ⓐ $36\pi\ \text{cm}^3$
- Ⓑ $\dfrac{256\pi}{3}\ \text{cm}^3$
- Ⓒ $100\pi\ \text{cm}^3$
- Ⓓ $16\pi\ \text{cm}^3$
- Ⓔ $\dfrac{500\pi}{3}\ \text{cm}^3$

QUESTÃO 19 – UEPA 2012

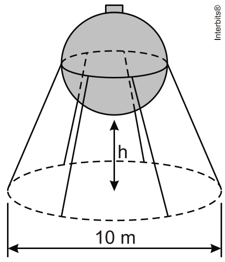
A ideologia dominante também se manifesta por intermédio do acesso aos produtos do mercado, sobretudo daqueles caracterizados por tecnologias de ponta. O "Cubo Magnético" é um brinquedo constituído por 216 esferas iguais e imantadas.

Supondo que esse brinquedo possa ser colocado perfeitamente ajustado dentro de uma caixa, também no formato de um cubo, com aresta igual a $30\ \text{mm}$, a razão entre o volume total das esferas que constituem o "Cubo Magnético" e o volume da caixa que lhe serve de depósito é:

- Ⓐ $\dfrac{\pi}{6}$
- Ⓑ $\dfrac{\pi}{5}$
- Ⓒ $\dfrac{\pi}{4}$
- Ⓓ $\dfrac{\pi}{3}$
- Ⓔ $\dfrac{\pi}{2}$

QUESTÃO 20 – ESPM 2011

Um reservatório de água é constituído por uma esfera metálica oca de 4 m de diâmetro, sustentada por colunas metálicas inclinadas de 60° com o plano horizontal e soldadas à esfera ao longo do seu círculo equatorial, como mostra o esquema abaixo.

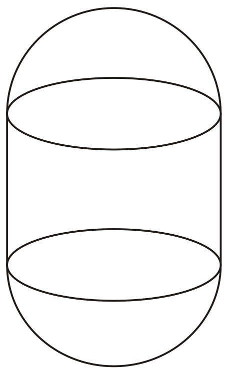


Sendo $\sqrt{3} \cong 1{,}73$, a altura h da esfera em relação ao solo é aproximadamente igual a:

- Ⓐ 2,40 m
- Ⓑ 2,80 m
- Ⓒ 3,20 m
- Ⓓ 3,40 m
- Ⓔ 3,60 m

QUESTÃO 21 – UFRGS 2010

Um reservatório tem forma de um cilindro circular reto com duas semiesferas acopladas em suas extremidades, conforme representado na figura a seguir.



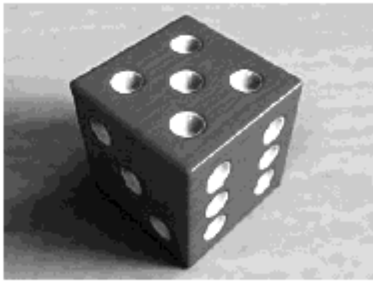
O diâmetro da base e a altura do cilindro medem, cada um, $4\ \text{dm}$, e o volume de uma esfera de raio r é $\dfrac{4}{3}\pi r^3$.

Dentre as opções a seguir, o valor mais próximo da capacidade do reservatório, em litros, é

- Ⓐ 50.
- Ⓑ 60.
- Ⓒ 70.
- Ⓓ 80.
- Ⓔ 90.

QUESTÃO 22 – UERJ 2009

Observe o dado ilustrado a seguir, formado a partir de um cubo, com suas seis faces numeradas de 1 a 6.



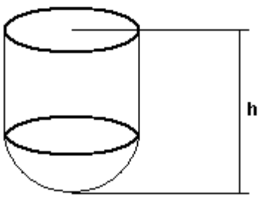
Esses números são representados por buracos deixados por semiesferas idênticas retiradas de cada uma das faces. Todo o material retirado equivale a 4,2% do volume total do cubo.

Considerando $\pi = 3$, a razão entre a medida da aresta do cubo e a do raio de uma das semiesferas, expressas na mesma unidade, é igual a:

Ⓐ 6
Ⓑ 8
Ⓒ 9
Ⓓ 10

QUESTÃO 23 – UFJF 2007

Um reservatório de água tem a forma de um hemisfério acoplado a um cilindro circular como mostra a figura a seguir.

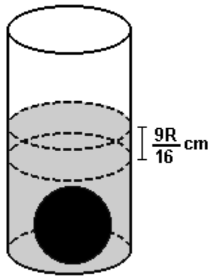


A medida do raio do hemisfério é a mesma do raio da base do cilindro e igual a r = 3 m. Se a altura do reservatório é h = 6 m, a capacidade máxima de água comportada por esse reservatório é:

Ⓐ 9π m³.
Ⓑ 18π m³.
Ⓒ 27π m³.
Ⓓ 36π m³.
Ⓔ 45π m³.

QUESTÃO 24 – UFPR 2006

Um recipiente com água tem, internamente, o formato de um cilindro reto com base de raio R cm. Mergulhando nesse recipiente uma esfera de metal de raio r cm, o nível da água sobe $\frac{9R}{16}$cm.

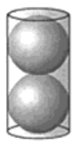


Qual é o raio dessa esfera?

Ⓐ $r = \frac{9R}{16}$cm
Ⓑ $r = \frac{3R}{5}$cm
Ⓒ $r = \frac{3R}{4}$cm
Ⓓ $r = \frac{R}{2}$cm
Ⓔ $r = \frac{2R}{3}$cm

QUESTÃO 25 – UFRGS 2006

Duas esferas de raio r foram colocadas dentro de um cilindro circular reto com altura 4r, raio da base r e espessura desprezível, como na figura a seguir.

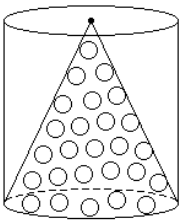


Nessas condições, a razão entre o volume do cilindro não ocupado pelas esferas e o volume das esferas é

Ⓐ $\frac{1}{5}$.
Ⓑ $\frac{1}{4}$.
Ⓒ $\frac{1}{3}$.
Ⓓ $\frac{1}{2}$.
Ⓔ $\frac{2}{3}$.

QUESTÃO 26 – UFSM 2005

Dentre as estratégias para conquistar o público, foi construída por renomado artista plástico uma obra de arte na área de acesso aos cinemas de um shopping. Ela é composta por um cilindro de material transparente, com 4 m de diâmetro e 6 m de altura, no qual foi inscrito um cone de mesma base e altura, também transparente. Esse cone contém, no seu interior, um líquido vermelho com inúmeras esferas douradas as quais, por um movimento constante desse líquido, criam um belo visual para quem observa. Sabe-se que as esferas têm 3 cm de raio e totalizam 10.000 unidades.

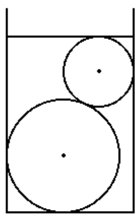


Assim, se π = 3, o volume do líquido contido no cone é de

- **A** 70,92 m³
- **B** 24,00 m³
- **C** 72,00 m³
- **D** 22,92 m³
- **E** 20,76 m³

QUESTÃO 27 – UERJ 2004

Duas esferas metálicas maciças de raios iguais a 8 cm e 5 cm são colocadas, simultaneamente, no interior de um recipiente de vidro com forma cilíndrica e diâmetro da base medindo 18 cm. Neste recipiente despeja-se a menor quantidade possível de água para que as esferas fiquem totalmente submersas, como mostra a figura.



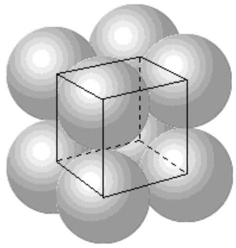
Posteriormente, as esferas são retiradas do recipiente.

A altura da água, em cm, após a retirada das esferas, corresponde, aproximadamente, a:

- **A** 10,6
- **B** 12,4
- **C** 14,5
- **D** 25,0

QUESTÃO 28 – UFRGS 2004

No desenho a seguir, em cada um dos vértices do cubo está centrada uma esfera cuja medida do diâmetro é igual à medida da aresta do cubo.



A razão entre o volume da porção do cubo ocupado pelas esferas e o volume do cubo é

- **A** $\frac{\pi}{6}$.
- **B** $\frac{\pi}{5}$.
- **C** $\frac{\pi}{4}$.
- **D** $\frac{\pi}{3}$.
- **E** $\frac{\pi}{2}$.

QUESTÃO 29 – PUCSP 2002

A tira seguinte mostra o Cebolinha tentando levantar um haltere, que é um aparelho feito de ferro, composto de duas esferas acopladas a um bastão cilíndrico.

Suponha que cada esfera tenha 10,5 cm de diâmetro e que o bastão tenha 50 cm de comprimento e diâmetro da base medindo 1,4 cm. Se a densidade do ferro é 7,8g/cm³, quantos quilogramas, aproximadamente, o Cebolinha tentava levantar?

(Use: $\pi = \frac{22}{7}$)

- **A** 18
- **B** 16
- **C** 15
- **D** 12
- **E** 10

QUESTÃO 30 – UERJ 2001

O modelo astronômico heliocêntrico de Kepler, de natureza geométrica, foi construído a partir dos cinco poliedros de Platão, inscritos em esferas concêntricas, conforme ilustra a figura abaixo:

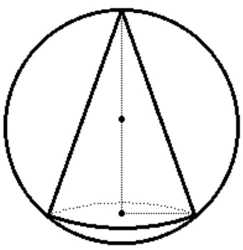
(LER, J. "*Dissertatio e Narratio*". Turim: Bottega d'Erasmo, 1972.)

A razão entre a medida da aresta do cubo e a medida do diâmetro da esfera a ele circunscrita, é:

Ⓐ $\sqrt{3}$
Ⓑ $\frac{(\sqrt{3})}{2}$
Ⓒ $\frac{(\sqrt{3})}{3}$
Ⓓ $\frac{(\sqrt{3})}{4}$

QUESTÃO 31 – PUCSP 1999

Um cone circular reto, cujo raio da base é 3 cm, está inscrito em uma esfera de raio 5 cm, conforme mostra a figura a seguir.

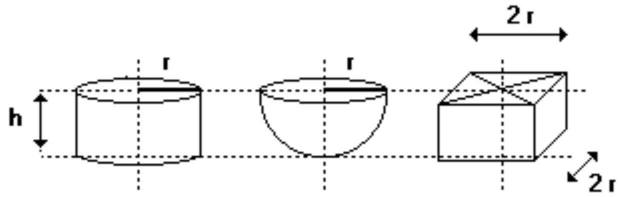


O volume do cone corresponde a que porcentagem do volume da esfera?

Ⓐ 26,4%
Ⓑ 21,4%
Ⓒ 19,5%
Ⓓ 18,6%
Ⓔ 16,2%

QUESTÃO 32 – UFF 1997

Na figura estão representados três sólidos de mesma altura h - um cilindro, uma semi-esfera e um prisma - cujos volumes são V_1, V_2 e V_3, respectivamente.

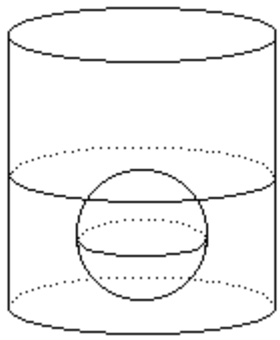


A relação entre V_1, V_2 e V_3 é:

Ⓐ $V_3 < V_2 < V_1$
Ⓑ $V_2 < V_3 < V_1$
Ⓒ $V_1 < V_2 < V_3$
Ⓓ $V_3 < V_1 < V_2$
Ⓔ $V_2 < V_1 < V_3$

QUESTÃO 33 – UFRGS 1996

Uma esfera de raio 2 cm é mergulhada num copo cilíndrico de 4 cm de raio, até encostar no fundo, de modo que a água do copo recubra exatamente a esfera.



Antes da esfera ser colocada no copo, a altura de água era

Ⓐ $\frac{27}{8}$ cm
Ⓑ $\frac{19}{6}$ cm
Ⓒ $\frac{18}{5}$ cm
Ⓓ $\frac{10}{3}$ cm
Ⓔ $\frac{7}{2}$ cm

GABARITO

QUESTÃO	ALTERNATIVA
01	**E**
02	**E**
03	**E**
04	**E**
05	**B**
06	**E**
07	**A**
08	**B**
09	**D**
10	**C**
11	**B**
12	**A**
13	**D**
14	**A**
15	**C**
16	**C**
17	**B**
18	**E**
19	**A**
20	**C**
21	**D**
22	**D**
23	**E**
24	**C**
25	**D**
26	**D**
27	**C**
28	**A**
29	**E**
30	**C**
31	**E**
32	**E**
33	**D**