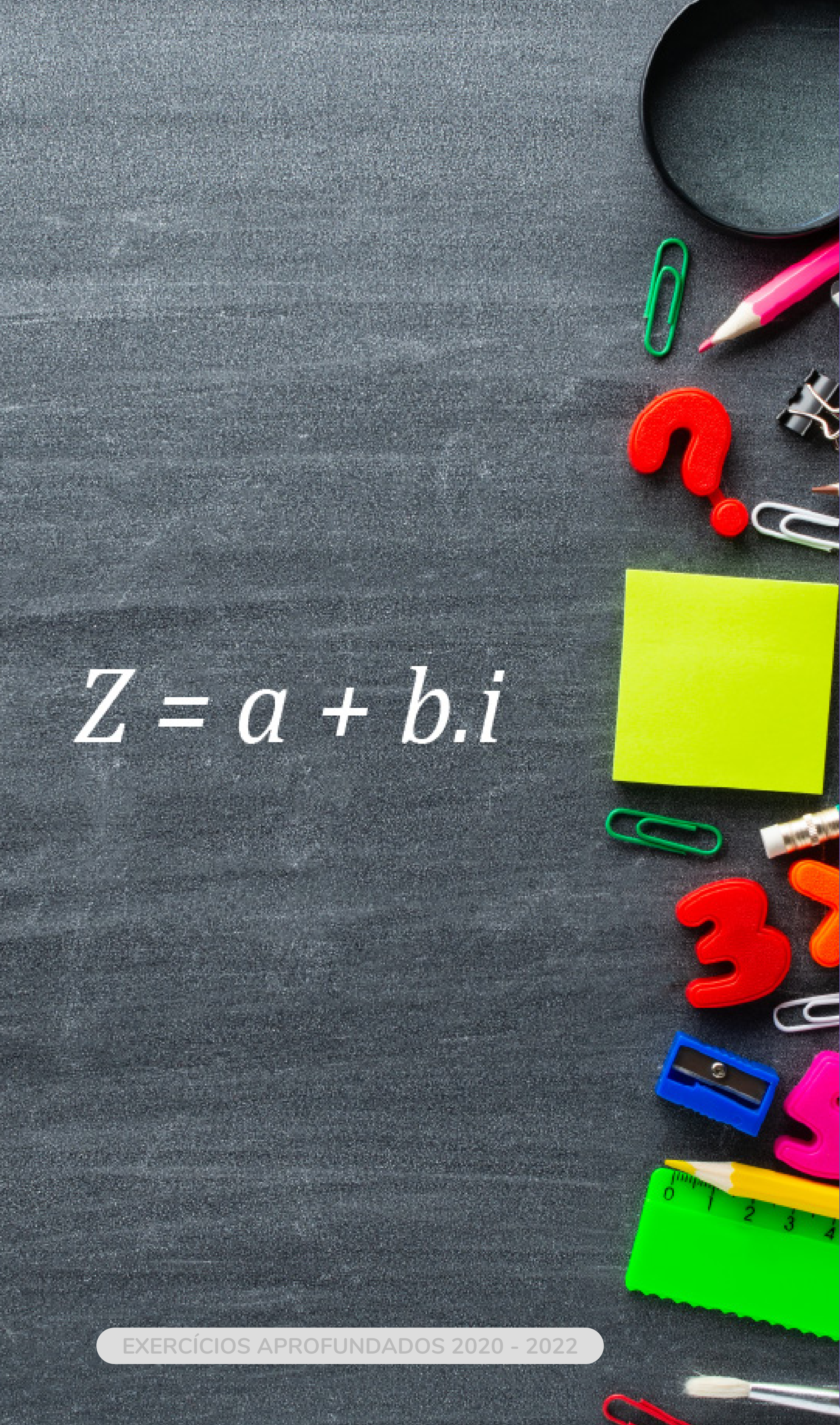


NÚMEROS COMPLEXOS

i

EXERCÍCIOS APROFUNDADOS 2020 - 2022

NÚMEROS COMPLEXOS

A matemática parece muito complexa, não é mesmo? Acredite, ela não é! Venha desmistificar essa ideia junto com a gente nas aulas de números complexos!

Esta subárea é composta pelos módulos:

1. Exercícios Aprofundados: Números Complexos

NÚMEROS COMPLEXOS

1. (EPCAR (AFA) 2020) Considere no plano de Argand Gaus a região S formada pelos afixos $P(x, y)$ dos números complexos $z = x + yi$, em que $\sqrt{-1} = i$

$$S = \begin{cases} |z - i| \geq 1 \\ |z| \leq 2 \\ \text{Re}(z) \leq 0 \end{cases}$$

Analise cada proposição abaixo quanto a ser (V) Verdadeira ou (F) Falsa.

( ) A área de S é maior que $4{,}8$ u.a.

( ) Se k é o elemento de S de menor argumento, então $ki \in S$.

( ) Todo z pertencente a S possui seu conjugado em S.

Sobre as proposições, tem-se que

a. apenas uma é verdadeira.

b. apenas duas são verdadeiras.

c. todas são verdadeiras.

d. todas são falsas.

2. (UEPG-PSS 3 2019) No plano complexo, se:

A é o afixo do número $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$,

B do número $z_2 = 4[\cos(2\pi) + i\,\text{sen}(2\pi)]$ e

C do número $z_3 = 4 + i$,

assinale o que for correto.

01. A área do triângulo ABC tem medida menor que 2.

02. A reta de equação $y = -3x + 12$ passa pelos pontos A e B.

04. O perímetro do triângulo ABC tem medida maior que 7.

08. A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ tem centro no ponto A e raio 1.

3. (ITA 2018) As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a. $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

b. $\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}$.

c. $\sqrt{2}$.

d. $\dfrac{3\sqrt{2} + 1}{2}$.

e. $3\sqrt{2}$

4. (IME 2018) Determine o valor de a na expressão abaixo, sabendo-se que $0 < a < 1$,

$$\frac{1}{16}\log_a 256^{\text{colog}_{(a^2)} 256^{\log_{(a^4)} 256^{\cdots^{\text{colog}_{(a^{(2^{65})})} 256}}}} = \text{Im}\{Z\}$$

onde Z é um número complexo que satisfaz a equação:

$2^{4.033}Z^2 - 2^{2.017}Z + 1 = 0.$

Obs.: $\text{Im}(Z)$ é a parte imaginária do número complexo Z.

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{8}$

c. $\frac{1}{16}$

d. $\frac{1}{32}$

e. $\frac{1}{64}$

5. (ESC. NAVAL 2018) Felipe, andando pelo pátio de sua escola, encontra, no chão uma lista de exercícios de matemática toda feita pelo seu amigo Bruno contendo as seguintes perguntas e respostas:

1) É verdade que $(\sqrt[3]{z})^2 = \sqrt[3]{z^2} \forall z \in \mathbb{C}$. Justifique.

Resposta: Sim, é verdade, pois, tomando a parte real igual a 1 e a parte imaginária igual a zero, tem-se $z = 1$ e, com isso, a igualdade permanece.

2) Cite duas descrições geométricas do conjunto B dos números complexos z que satisfazem $|z-2| = |z-3i|$, sendo i a unidade imaginária.

Resposta: É uma reta que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$ e tem coeficiente igual a $\frac{2}{3}$.

3) Seja z um número complexo e $\text{Re}(z)$ a parte real de z. Qual é o conjunto dos pontos tais que $\text{Re}(z^2) < 0$?

Resposta: É o conjunto

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{\pi}{4} < \text{argumento de } z < \frac{3\pi}{4} \right\}$$

união com o conjunto

$$B = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \frac{-3\pi}{4} < \text{argumento de } z < \frac{-\pi}{4} \right\}.$$

4) Seja z um número complexo. Os valores de z tais que $e^{2z-1} = 1$ é igual a?

Resposta: $z = \frac{1}{2} + k\pi i$ para $k \in \mathbb{Z}$. Sendo i a unidade imaginária.

Suponha que Felipe saiba responder a todas as perguntas de forma correta. E que ele as corrigirá atribuindo a cada pergunta o valor de $2{,}5$ pontos por resposta correta e zero ponto por resposta errada, NÃO existe acerto de parte da questão (Bruno acerta ou erra sua resposta). Sendo assim, assinale a opção que apresenta a quantidade de pontos obtidos por Bruno na correção de Felipe.

a. 10

b. $7{,}5$

c. 5

d. $2{,}5$

e. zero

6. (UEPG 2018) Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} z+\bar{z} & i^{52} & i^{612} \\ z \cdot \bar{z} & z-\bar{z} & \log_2 1 \\ \cos\left(\frac{13\eth}{2}\right) & i^{342} & i^{64} \end{bmatrix},$$ onde z e $\bar{z}$, seu conjugado, são números complexos, assinale o que for correto.

01. Se $z = a + bi$ e o $\det(A) = -26$, então o valor de $a^2 + b^2 = 13$.

02. Se $z = 2$, então a solução da inequação $\det(A) < -2x^2$ é o intervalo $]-2, 2[$.

04. Se $\bar{z} = 1 - i$, então o $[\det(A)]^3 = 128(1+i)$.

08. Se $z = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\text{sen}\,(x) = \det(A)$ e x pertence ao quarto quadrante, então a $\text{tg}\,(x) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

16. Se $z = 1 + i$, então uma das raízes de $\sqrt[3]{\det(A)}$ é $\sqrt[6]{32}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$.

7. (UEM 2018) Seja $V = \{1, z_2, z_3, z_4, z_6\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}$ formado pelos números complexos que, no plano complexo, correspondem aos vértices de um hexágono regular cujo centro está situado na origem. Assinale o que for **correto**.

01. O produto de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.

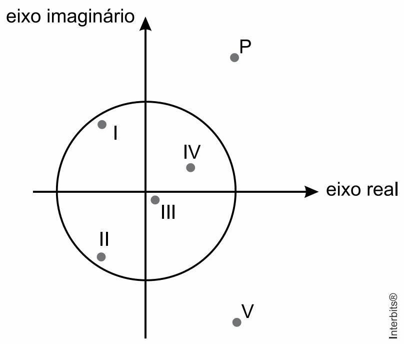
02. A diferença de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.

04. O conjugado de todo elemento de V também pertence a V.

08. A soma de quaisquer dois elementos de V também pertence a V.

16. A divisão de um elemento de V por outro elemento de V sempre pertence a V.

8. (FGV 2017) Seja Z um número complexo cujo afixo P está localizado no 1° quadrante do plano complexo, e sejam I, II, III, IV e V os afixos de cinco outros números complexos, conforme indica a figura seguinte.



Se a circunferência traçada na figura possui raio 1 e está centrada na origem do plano complexo, então o afixo de $\frac{1}{z}$ pode ser

a. I.

b. II.

c. III.

d. IV.

e. V.

9. (Uece 2017) Se i é o número complexo cujo quadrado é igual a -1, e n é um número natural maior do que 2, então, pode-se afirmar corretamente que $(\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que

a. n for ímpar.

b. n for um múltiplo de 4.

c. n for um múltiplo de 3.

d. n for um múltiplo de 5.

10. (Uem 2017) Seja z um número complexo qualquer. Sabendo-se que o argumento de um número complexo é único, assinale o que for **correto**.

01. Se $z = a + bi$ e $\arg z = \theta$, então $\cos\theta = \frac{b}{a^2 + b^2}$.

02. Sendo o argumento de z igual a $\frac{\pi}{6}$, então o argumento do conjugado de z é $2\pi - \frac{\pi}{6}$.

04. Se $\arg(z\bar{z}) = 2\arg(z)$, então z é um número imaginário puro.

08. $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, temos $\arg(z) \leq \arg(z^n)$.

16. Sendo o $\arg(z) = \frac{3\pi}{4}$ e $|z| = 2$, então z^{128} é um número real puro.

11. (IME 2017) Sejam Z_1 e Z_2 números complexos tais que Z_2 é imaginário puro e $|Z_1 - Z_2| = |Z_2|$. Para quaisquer valores de Z_1 e Z_2 que atendam a essas condições tem-se que:

a. $\text{Im}(Z_2) > 0$

b. $\text{Im}(Z_2) \leq 0$

c. $|Z_1| \leq 2|Z_2|$

d. $\text{Re}(Z_1) \geq 0$

e. $\text{Re}(Z_1) \leq \text{Im}(Z_2)$

12. (ITA 2017) Considere a equação $(a-bi)^{501} = \dfrac{2(a+bi)}{(a^2+b^2)^{250}+1}$.
O número de pares ordenados $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação é

a. 500.

b. 501.

c. 502.

d. 503.

e. 504.

13. (UEM 2017) Sejam os números complexos $z = 1 - i$ e $w = 2 + i$. Denotam-se por $\bar{z}$ e $\bar{w}$ os conjugados de z e w, respectivamente.

Considerando esses dados, assinale o que for **correto**.

01. $z \cdot \bar{w} = 2 - 3i$.

02. $\bar{z} \cdot |w| = \sqrt{3} + \sqrt{3}i$.

04. $\dfrac{w}{z} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

08. $z + w$ é um número imaginário.

16. Seja $P(x) = 0$ uma equação polinomial, com coeficientes reais, que tem z e w como raízes simples. Então o menor grau de $P(x)$ é 2.

14. (UEPG 2017) Se uma das raízes quadradas do número complexo z é $\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{6}}{2}i$ e uma das raízes cúbicas do número complexo w é $1+i$, assinale o que for correto.

01) $|z \cdot w| = 4\sqrt{2}$.

02) O argumento de w é $\dfrac{\pi}{4}$.

04) w^{20} é um número real.

08) A forma trigonométrica de z é $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

16) z^{15} é um imaginário puro.

15. (UEPG 2017) Considerando C o conjunto dos números complexos, $z \in C$ e $\bar{z}$ o seu conjugado, assinale o que for correto.

01. Todas as soluções complexas da equação $z^4 + 16 = 0$ pertencem ao conjunto $S = \{z \in C;\ 0 < |z| \leq 2\}$.

02. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ é o módulo de uma das soluções complexas da equação $iz + 3\bar{z} + (z+\bar{z})^2 - i = 0$.

04. $z = \sqrt{6} - i$ é uma das raízes de $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}\,i}$.

08. $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i\right)^{21} = i$.

16. $\left[2 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{6}\right)\right] \cdot \left[4 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{sen}\dfrac{\pi}{3}\right)\right] = 8\,i$.

16. (UEM-PAS 2017) Considerando $z_1 = (1 - ai)(a + 2i)$ e $z_2 = (a + i)$, dois números complexos com $a \in \mathbb{R}$, assinale o que for **correto**.

01) Qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, z_1 não é um número real.

02) A parte imaginária do número $z = z_1 \cdot z_2$ é um polinômio na variável a de grau 3.

04) $z_2^{-1} \cdot \overline{z_2} = 1.$

08) Se $a = 0$, então $(z_1)^{18}$ é um número positivo.

16) Se z_2 for um número imaginário puro, então as raízes quadradas de z_2 são $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ e $-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

17. (UNICAMP 2017) Seja i a unidade imaginária, isto é, $i^2 = -1$. O lugar geométrico dos pontos do plano cartesiano com coordenadas reais (x, y) tais que $(2x + yi)(y + 2xi) = i$ é uma

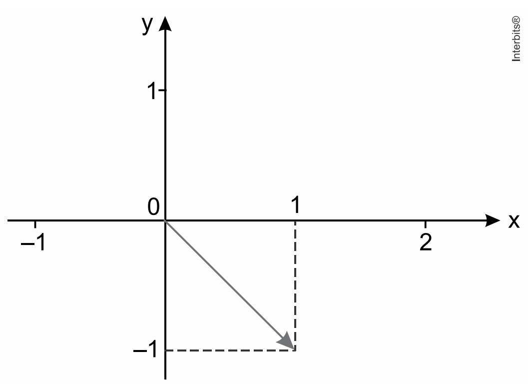
a. elipse.

b. hipérbole.

c. parábola.

d. reta.

18. (FGV 2016) Observe o plano Argand-Gauss a seguir:



Elevando-se a 2015 o número complexo indicado nesse plano Argand-Gauss, o afixo do número obtido será um ponto desse plano com coordenadas idênticas e iguais a

a. 2^{2015}

b. 2^{1007}

c. 1

d. 2^{-2015}

e. -2^{1007}

19. (ITA 2016) Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por

$$p(z) = z^4 + (2+i)z^3 + (2+i)z^2 + (2+i)z + (1+i).$$

Podemos afirmar que

a. nenhuma das raízes de p é real.

b. não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.

c. a soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2+\sqrt{2}$.

d. o produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.

e. o módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

20. (UEPG 2016) Se $z_1 = 1+i$, $z_2 = z_3 - 4 \cdot z_1$ e $z_3 = 3+i$, assinale o que for correto.

01. A parte real do número complexo $\frac{z_1}{z_2}$ é positiva.

02. O argumento de $(z_1)^2 + (z_2)^2$ é $\frac{3\pi}{4}$.

04. O afixo do número complexo $z_1 \cdot z_2$ pertence ao quarto quadrante.

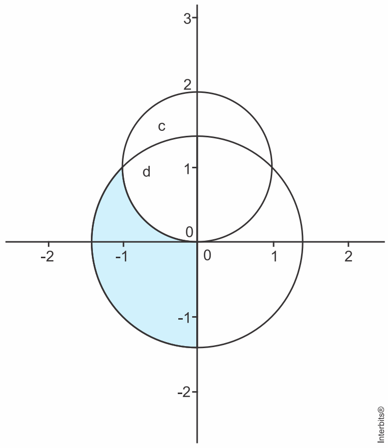
08. $z_1 + \overline{z}_2$ é um imaginário puro.

16. $z_1^{20} = 2^{10}[\cos(5\pi) + i\,\text{sen}(5\pi)]$.

GABARITO

1. [A]

$S=\begin{cases}|z-i|\geq 1\\ |z|\leq 2\\ Re(z)\leq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x^2+(y-1)^2\geq 1\\ x^2+y^2\leq\sqrt{3}\\ x\leq 0\end{cases}$, temos então a seguinte representação gráfica desta região:



Portanto:

[F] A área de S é maior que $4{,}8$ u.a.

Calculando a área do semicírculo maior, obtemos: $\dfrac{\pi\cdot\sqrt{2}^2}{2}\simeq 3{,}14<4{,}8$, portanto a área S é menor que $4{,}8$.

[V] Se k é o elemento de S de menor argumento, então $ki\in S$.

$k=0$, então $ki=0$ pertence a S.

[F] Todo z pertencente a S possui seu conjugado em S.

Considerando $z=0-i$, o seu conjugado $0+i$ não está contido em S.

Portanto, a resposta é a letra [A], apenas uma é verdadeira.

2. 01 + 04 = 05.

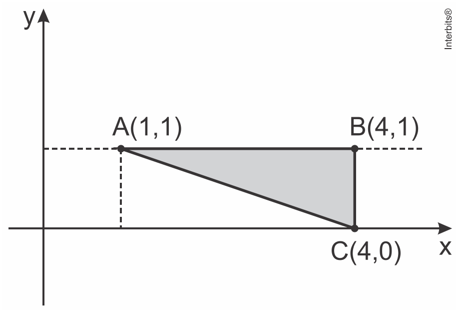
Determinando os pontos A, B e C, obtemos:

$z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\operatorname{sen}\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=1+i\Rightarrow A(1,1)$

$z_2=4[\cos(2\pi)+i\operatorname{sen}(2\pi)]=4\cdot(1+0i)=4\Rightarrow B(4,0)$

$z_3=4+i\Rightarrow C(4,1)$

Representando o triângulo ABC no plano Cartesiano, obtemos:



[01] Verdadeira, pois $s_{\Delta ABC}=\dfrac{3\cdot 1}{2}=1{,}5<2.$

[02] Falsa. Substituindo o ponto A na equação da reta, obtemos: $1=-3\cdot 1+12\Rightarrow 1=9$ (falsa).

[04] Verdadeira. $AB^2=3^2+1^2\Rightarrow AB=\sqrt{10}$, o perímetro será $\sqrt{10}+3+1>7.$

[08] Falsa. Determinando o raio r da circunferência obtemos $r=\sqrt{2}.$

$$x^2+y^2-2x-2y=0$$
$$x^2-2x+1+y^2-2y+1=2$$
$$(x-1)^2+(y-1)^2=\sqrt{2}^2$$

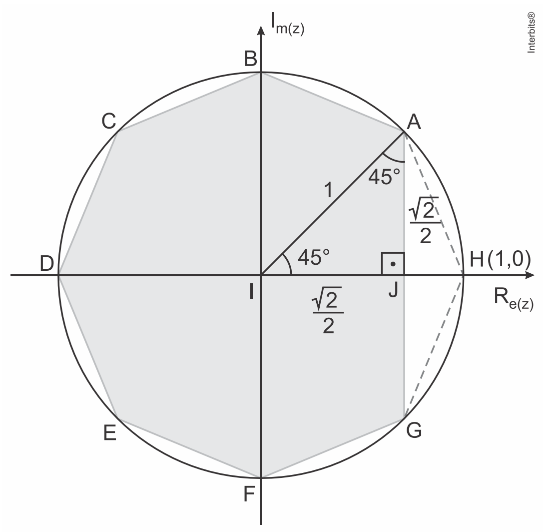
Portanto, o raio da circunferência é $r=\sqrt{2}.$

3. [D]

$$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7=\frac{1\cdot\left(z^8-1\right)}{z-1}$$
$$\frac{z^8-1}{z-1}=0$$
$$z^8-1=0,\ z\neq 1$$

As raízes da equação $z^8-1=0$, no plano de Argand-Gauss, representam um octógono regular inscrito numa circunferência de raio unitário centrada na origem.

Como 1 não é solução do problema, temos a figura abaixo:



$$JH = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$S_{ABCDEFG}$: área do polígono ABCDEFG

$S_{ABCDEFGH}$: área do polígono ABCDEFGH

S_{AIH} : área do polígono AIH

S_{AJH} : área do polígono AJH

S_{AHG} : área do polígono AHG

$$S_{AIH} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \text{sen}\,45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}$$
$$S_{ABCDEFGH} = 8 \cdot S_{AIH} = 2\sqrt{2}$$
$$S_{AJH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$$
$$S_{AHG} = 2 \cdot S_{AJH} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$
$$S_{ABCDEFG} = S_{ABCDEFGH} - S_{AHG}$$
$$S_{ABCDEFG} = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} = \frac{3\sqrt{2}+1}{2}$$

4. [A]

De $\text{Im}\{Z\} = \frac{1}{16} \log_a 256^{\text{colog}_{(a^2)} 256^{\log_{(a^4)} 256^{\cdots^{\text{colog}_{(a^{(2^{65})})} 256}}}}$,

$$\text{Im}\{Z\} = \frac{1}{16} \cdot \text{colog}_{\left(a^{2^{65}}\right)} 256 \cdot \log_{\left(a^{24}\right)} 256 \cdot \text{colog}_{\left(a^{2^{63}}\right)} 256 \cdot \ldots \cdot \log_a 256$$
$$\text{Im}\{Z\} = \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{1}{2^{65}}\right) \cdot \frac{1}{2^{64}} \cdot \left(-\frac{1}{2^{63}}\right) \cdot \frac{1}{2^{62}} \cdot \ldots \cdot \left(-\frac{1}{2^1}\right) \cdot \frac{1}{2^0} \cdot (\log_a 256)^{66}$$
$$\text{Im}\{Z\} = \frac{1}{16} \cdot \frac{-1}{2^{65+64+63+\ldots+1}} \cdot (\log_a 256)^{66}$$

$\text{Im}\{Z\} = \frac{-1}{2^{2149}} \cdot (\log_a 256)^{66} < 0,$ pois $(\log_a 256)^{66} > 0.$

De $2^{4033} Z^2 - 2^{2017} Z + 1 = 0,$

$$2 \cdot 2^{4033} Z^2 - 2 \cdot 2^{2017} Z + 2 = 0$$
$$\left(2^{2017} Z\right)^2 - 2 \cdot 2^{2017} Z \cdot 1 + 1^2 + 1 = 0$$
$$\left(2^{2017} Z - 1\right)^2 = -1$$

$2^{2017} Z - 1 = i$ ou $2^{2017} Z - 1 = -i$

De $2^{2017} Z - 1 = i,$

$Z = \frac{1}{2^{2017}} + \frac{1}{2^{2017}} i$ (não convém, pois $\text{Im}\{Z\} < 0$).

De $2^{2017} Z - 1 = -i,$

$$Z = \frac{1}{2^{2017}} - \frac{1}{2^{2017}} i$$

Então,

$$-\frac{1}{2^{2149}} \cdot (\log_a 256)^{66} = -\frac{1}{2^{2017}}$$
$$(\log_a 256)^{66} = 2^{132}$$

Como $0 < a < 1, \log_a 256 < 0.$

Daí,

$$\log_a 256 = -\sqrt[66]{2^{132}}$$
$$\log_a 256 = -4$$
$$a^{-4} = 256$$
$$\frac{1}{a^4} = 256$$
$$a^4 = \frac{1}{256}$$
$$a = \frac{1}{4}$$

5. [B]

1) É verdade que $(\sqrt[3]{z})^2 = \sqrt[3]{z^2}\ \forall z \in \mathbb{C},$ no entanto, a justificativa usada por Bruno é incorreta, observando que ele analisa a proposição dada para um valor particular de z.

Dessa forma, sua nota é zero.

2) De $|z-2| = |z-3i|,$

$|x+yi-2| = |x+yi-3i|,$ onde x e y são reais.

$$|(x-2)+yi| = |x+(y-3)i|$$
$$(x-2)^2 + y^2 = x^2 + (y-3)^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9$$
$$-4x + 4 = -6y + 9$$

$$6y = 4x + 5$$
$$y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$$

Note que:

$$\frac{7}{6} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6}$$
$$\frac{7}{6} = \frac{7}{6}$$

Logo, trata-se de uma reta que passa pelo ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right)$ e tem coeficiente angular igual a $\frac{2}{3}$.

Dessa forma, sua nota é $2{,}5$.

3) Seja $z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta)$. Daí,

$$z^2 = |z|^2 \cdot (\cos(2\theta) + i \cdot \operatorname{sen}(2\theta))$$
$$\operatorname{Re}(z^2) = |z|^2 \cdot \cos(2\theta)$$
$$\operatorname{Re}(z^2) < 0$$
$$|z|^2 \cdot \cos(2\theta) < 0$$
$$\cos(2\theta) < 0$$
$$\frac{\pi}{2} < 2\theta < \frac{3\pi}{2}$$
$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}$$

ou

$$2\pi + \frac{\pi}{2} < 2\theta < 2\pi + \frac{3\pi}{2}$$
$$\frac{5\pi}{2} < 2\theta < \frac{7\pi}{2}$$
$$\frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$$

Note que:

$$\frac{5\pi}{4} \equiv -\frac{3\pi}{4} \text{ e } \frac{7\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{4}$$

Portanto, o conjunto dos pontos tais que $\operatorname{Re}(z^2) < 0$, é dado por:

$$\left\{z \in \mathbb{C}:\ \frac{\pi}{4} < argumento\ de\ z < \frac{3\pi}{4}\right\}$$
$$\cup \left\{z \in \mathbb{C}:\ -\frac{3\pi}{4} < argumento\ de\ z < -\frac{\pi}{4}\right\}$$

Dessa forma, sua nota é $2{,}5$.

4) De $e^{2z-1} = 1$,

$$e^{2\cdot(x+yi)-1} = e^0$$
$$e^{2x+2yi-1} = e^0$$
$$e^{2x-1} \cdot e^{2yi} = e^0$$
$$e^{2x-1} \cdot (\operatorname{cis}2y) = 1 \cdot (\operatorname{cis}0)$$
$$\begin{cases} e^{2x-1} = 1 \\ \operatorname{cis}(2y) = \operatorname{cis}0 \end{cases}$$

De $e^{2x-1} = 1$,

$$e^{2x-1} = e^0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

De $\operatorname{cis}(2y) = \operatorname{cis}0$,

$$2y = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$y = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Logo,

$$z = \frac{1}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Dessa forma, sua nota é $2{,}5$.

Portanto, Bruno obteve $7{,}5$ pontos na correção de Felipe.

6. 02 + 04 + 08 + 16 = 30.

Analisando as alternativas uma a uma

[01] INCORRETA. Calculando:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} z+\bar{z} & i^{52} & i^{612} \\ z\cdot\bar{z} & z-\bar{z} & \log_2 1 \\ \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) & i^{342} & i^{64} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ (a^2+b^2) & 2bi & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4abi - 2(a^2+b^2)$$

$$4abi - 2(a^2+b^2) = -26 \Rightarrow -2abi + (a^2+b^2) = 13$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} z+\bar{z} & i^{52} & i^{612} \\ z\cdot\bar{z} & z-\bar{z} & \log_2 1 \\ \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) & i^{342} & i^{64} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4 - 4 = -8 \Rightarrow -8 < -2x^2 \Rightarrow x^2 > 4 \Rightarrow]-2, 2[$$

[04] CORRETA. Calculando:

$$\bar{z} = 1 - i \Rightarrow z = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} z+\bar{z} & i^{52} & i^{612} \\ z \cdot \bar{z} & z-\bar{z} & \log_2 1 \\ \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) & i^{342} & i^{64} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ \left(a^2+b^2\right) & 2bi & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4abi - 2\left(a^2+b^2\right) = 4i - 4 = 4(i-1)$$

$$4(i-1)^3 = 64(i-1)^3$$

$$\text{Mas } (i-1)^3 = 2(1+i)$$

$$4(i-1)^3 = 64 \cdot 2(1+i) = 128(1+i)$$

[08] CORRETA. Calculando:

$$z = \frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{\sqrt{6}}{6} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ \left(a^2+b^2\right) & 2bi & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4abi - 2\left(a^2+b^2\right)$$

$$\det(A) = -2a^2 = -2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2 = \frac{-12}{36} \Rightarrow \det(A) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \text{sen } x = -\frac{1}{3}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{tg} x = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{8} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

[16] CORRETA. Calculando:

$$z = 1 + i \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} z+\bar{z} & i^{52} & i^{612} \\ z \cdot \bar{z} & z-\bar{z} & \log_2 1 \\ \cos\left(\frac{13\pi}{2}\right) & i^{342} & i^{64} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ \left(a^2+b^2\right) & 2bi & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 4abi - 2\left(a^2+b^2\right) = 4i - 4$$

$$4i - 4 \Rightarrow \rho = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$$

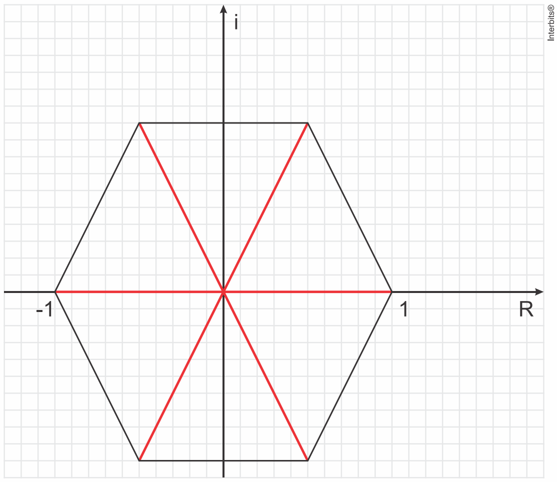
$$4i - 4 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{-4}{\sqrt{32}} = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \text{sen } \theta = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sqrt[3]{(4i-4)} = \sqrt[3]{\sqrt{32}} \cdot \left[\cos\left(\frac{360 \cdot 0 + \frac{3\pi}{4}}{3}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{360 \cdot 0 + \frac{3\pi}{4}}{3}\right)\right]$$

$$= \sqrt[6]{32} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

7. 01 + 04 + 16 = 21.

Sendo o hexágono regular com centro na origem, então pode-se dizer que este está inscrito numa circunferência de raio igual ao lado do hexágono, no caso.



Assim, os vértices do hexágono serão iguais aos pontos de uma circunferência dividida em 6 partes. Assim, pode-se escrever:

$$z^6 - 1 = 0 \Rightarrow z^6 = 1 \Rightarrow z = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{6}\right) = \text{cis}\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \text{cis } 0 = 1 \quad \text{(conforme dado pelo enunciado)}$$

$$z_2 = \text{cis } \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = \text{cis } \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = \text{cis } \pi = -1$$

$$z_5 = \text{cis } \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_6 = \text{cis } \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

[01] CORRETA. Calculando:

$$z_x z_y = \text{cis}\left(\frac{x\pi}{3}\right) \cdot \text{cis}\left(\frac{y\pi}{3}\right) = \text{cis}\left(\frac{(x+y)\pi}{3}\right) \Rightarrow \text{cis}\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

[02] INCORRETA. Calculando:

$$z_1 - z_4 = 1 - (-1) = 2 \notin V$$

[04] CORRETA. Percebe-se que z_6 é o conjugado de z_2 e z_5 é o conjugado de z_3.

[08] INCORRETA. Calculando:

$$z_1 + z_4 = 1 + (-1) = 0 \notin V$$

[16] CORRETA. Calculando:

$$\frac{z_x}{z_y} = \frac{\text{cis}\left(\frac{x\pi}{3}\right)}{\text{cis}\left(\frac{y\pi}{3}\right)} = \text{cis}\left(\frac{(x-y)\pi}{3}\right) \Rightarrow \text{cis}\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

8. [C]

Seja $Z = x + yi$, com $i = \sqrt{-1}$, $x > 1$ e $y > 1$. Assim, vem

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z} &= \frac{1}{x+yi}\\ &= \frac{1}{x+yi}\cdot\frac{x-yi}{x-yi}\\ &= \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i.\end{aligned}$$

Portanto, como $0 < \frac{x}{x^2+y^2} < 1$ e $0 < \frac{y}{x^2+y^2} < 1$, tem-se que a imagem de $\frac{1}{Z}$ pode ser III.

9. [B]

Sendo $|z|$ e θ, respectivamente, o módulo e o argumento principal de $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, temos

$$|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$$

e

$$\text{tg}\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \text{tg}\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}\text{rad}.$$

Assim, vem $z = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right)$ e, portanto, pela Primeira Fórmula de Moivre, encontramos

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n &= z^n\\ &= 2^n\cdot\left(\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

Desse modo, $(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^n$ é um número real sempre que $\text{sen}\left(n\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 0$, ou seja, sempre que $n = 4\cdot(2k)$ ou $n = 4\cdot(2k+1)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras, z^n é um número real sempre que n for um múltiplo de 4.

10. 02 + 16 = 18.

[01] Falsa. Na verdade, tem-se que $\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

[02] Verdadeira. Com efeito, se $z = \rho\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, então $\overline{z} = \rho\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\,\text{sen}\frac{\pi}{6}\right)$, ou seja, $\overline{z} = \rho\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,\text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. Logo, podemos escrever $\arg\overline{z} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$.

[04] Falsa. Seja $z = \text{cis}\,0$. Logo, segue que $\overline{z} = \text{cis}\,0$ e, portanto, temos $z\cdot\overline{z} = \text{cis}\,0$. Daí, vem $\arg(z\overline{z}) = 0$ e a condição $\arg(z\overline{z}) = 2\arg(z)$ é satisfeita. Porém, o número $z = \text{cis}\,0 = 1$ é real.

[08] Falsa. Restringindo $\arg z$ ao intervalo $(-\pi, \pi]$, tomemos $z = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Desse modo, vem $z^2 = \text{cis}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ e, assim, é imediato que $\arg z = -\frac{\pi}{4}$ e $\arg z^2 = -\frac{\pi}{2}$. Contradição.

[16] Verdadeira. De fato, pois sendo $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{3\pi}{4}\right)$, pela Primeira Fórmula de Moivre, temos

$$\begin{aligned}z^{128} &= 2^{128}\left(\cos\left(128\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\,\text{sen}\left(128\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right)\\ &= 2^{128}(\cos 96\pi + i\,\text{sen}\,96\pi)\\ &= 2^{128}(\cos 0 + i\,\text{sen}\,0)\\ &= 2^{128},\end{aligned}$$

que é um número real.

11. [C]

Calculando:

$Z_2 = ai,\ a \in \mathbb{R}$

$|Z_1 - ai| = |a|$

distância de Z_1 até $ai = |a|$

$Z_1 \rightarrow$ circunferência do centro em ai e raio $|a|$

$|Z_1| \rightarrow$ corda da circunferência de diâmetro $= 2|Z_2|$

$|Z_1| \leq 2|Z_2|$

12. [D]

Calculando:

$z = a + bi$
$\bar{z} = a - bi$
$|z|^2 = a^2 + b^2$

Caso 1)

$$z^{-501} = \frac{2\cdot(z)}{|z|^{500}+1}\cdot z^{501} \Rightarrow |z|^{1002} = \frac{2\cdot z^{502}}{|z|^{500}+1}\cdot z^{501}$$

$$\Rightarrow z^{502} = \frac{|z|^{1002}\cdot\left(|z|^{500}+1\right)}{2}$$

$$\frac{|z|^{1002}\cdot\left(|z|^{500}+1\right)}{2} = 1 \Rightarrow z^{502} = 1 \Rightarrow 502 \text{ soluções}$$

Caso 2)

$$z^{-501} = \frac{2z}{|z|^{500}+1} \Rightarrow \text{zero é solução}$$

$$\text{Para } z \neq 0 \Rightarrow z^{-501} = \frac{2\cdot|z|}{|z|^{500}+1} \Rightarrow |z|^{500} = \frac{2}{|z|^{500}+1}$$

$$|z|^{500} = w \Rightarrow w = \frac{2}{w+1} \Rightarrow w^2 + w - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} w = 1 \\ w = -2 \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$|z|^{500} = 1 \Rightarrow |z| = 1$$

Uma solução!

Total de soluções $= 503.$

13. 04.

[01] FALSO. Calculando:

$z \cdot \bar{w} = 2 - 3i$

$(1-i)\cdot(2-i) = 2 - 3i + i^2 = 1 - 3i$

[02] FALSO. Calculando:

$$\bar{z}\cdot|w| = (1+i)\cdot\left(\sqrt{2^2+1^2}\right) = (1+i)\cdot\left(\sqrt{5}\right) = \sqrt{5} + \sqrt{5}i$$

[04] VERDADEIRO. Calculando:

$$\frac{w}{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$$\frac{2+i}{1-i} = \frac{(2+i)\cdot(1+i)}{(1-i)\cdot(1+i)} = \frac{2+2i+i-1}{1-(-1)} = \frac{1+3i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

[08] FALSO. Calculando:

$z + w = 1 - i + 2 + i = 3$

[16] FALSO. Sempre que um polinômio admitir uma raiz complexa admitirá também seu conjugado, logo, se z e w são raízes, $\bar{z}$ e $\bar{w}$ também são.

Então o menor grau de $P(x)$ é $4.$

14. 01 + 04 + 08 = 13.

Tem-se que $z = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^2 = -1 + \sqrt{3}i$ e $w = (1+i)^3 = -2 + 2i.$

[01] Verdadeira. De fato, pois

$|z\cdot w| = |z|\cdot|w| = 2\cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$

[02] Falsa. Seja θ o argumento principal de $w.$

Assim, temos $\text{tg}\,\theta = \frac{2}{-2} = -1,$ o que implica em $\theta = \frac{3\pi}{4}\text{rad}.$

[04] Verdadeira. Com efeito, pois

$w^{20} = (-2+2i)^{20} = (-8i)^{10} = -2^{30}.$

[08] Verdadeira. Seja α o argumento principal de $z.$ Logo, sendo $\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3},$ vem $\alpha = \frac{2\pi}{3}\text{rad}.$

Daí, segue que $z = 2\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\frac{2\pi}{3}\right).$

[16] Falsa. Pela Primeira Fórmula de De Moivre, segue que

$$\begin{aligned} z^{15} &= 2^{15}\cdot\left(\cos 15\cdot\frac{2\pi}{3} + i\,\text{sen}\,15\cdot\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 2^{15}\cdot(\cos 10\pi + i\,\text{sen}\,10\pi) \\ &= 2^{15}. \end{aligned}$$

Portanto, z^{15} não é um imaginário puro.

15. 01 + 02 + 04 + 08 + 16 = 31.

[01] CORRETA. Calculando:

$z^4 + 16 = 0 \Rightarrow z^4 = -16$

$$|z| = \sqrt{(-16)^2 + 0^2} \Rightarrow |z| = 16 \Rightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{-16}{16} = -1 \\ \text{sen}\,\theta = \frac{0}{16} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta = 180°$

$$z_1 = \sqrt[4]{16}\cdot\left[\cos\left(\frac{180°}{4}\right)+i\cdot\text{sen}\left(\frac{180°}{4}\right)\right]$$

$$= 2\cdot\left[\frac{\sqrt{2}}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}+i\sqrt{2}$$

$$|z_1| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$z_2 = i\cdot z_1 = i\cdot\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}+i\sqrt{2} \Rightarrow |z_2| = 2$$

$$z_3 = i\cdot z_2 = i\cdot\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}-i\sqrt{2} \Rightarrow |z_3| = 2$$

$$z_4 = i\cdot z_3 = i\cdot\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-i\sqrt{2} \Rightarrow |z_4| = 2$$

[02] CORRETA. Calculando:

$$z = a+bi$$
$$z+\bar{z} = a+bi+a-bi = 2a$$

$$iz+3\bar{z}+(z+\bar{z})^2-i=0 \Rightarrow i(a+bi)+3\cdot(a-bi)+(2a)^2-i=0$$
$$ai-b+3a-3bi+4a^2-i=0 \Rightarrow \left(4a^2+3a-b\right)+(a-3b-1)i=0$$

$$a\cdot(4a+3)-b=0 \Rightarrow a\cdot(4a+3)=b$$
$$a-3b-1=0 \Rightarrow a-3b=1 \Rightarrow a-3a\cdot(4a+3)=1$$

$$-12a^2-8a-1=0 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

$$\rho = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[04] CORRETA. Calculando:

$$\left(\sqrt{6}-i\right)^2 = 6-2\sqrt{6}i+i^2 = 5-2\sqrt{6}\,i$$

[08] CORRETA. Calculando:

$$z = \frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$$
$$\rho = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 30°$$

$$z^{21} = 1^{21}\cdot\left[\cos(21\cdot30°)+i\cdot\text{sen}(21\cdot30°)\right] = \cos(630°)+i\cdot\text{sen}(630°)$$
$$z^{21} = \cos(270°)+i\cdot\text{sen}(270°) = 0+i = i$$

[16] CORRETA. Calculando:

$$\left[2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{6}\right)\right]\cdot\left[4\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \left[2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[4\cdot\left(\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(2+2i\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3}+6i+2i-2\sqrt{3} = 8i$$

16. 02 + 16 = 18.

Sendo,

$$z_1 = (1-ai)(a+2i) = a+2i-a^2i+-2ai^2$$
$$z_1 = 3a+(2-a^2)\cdot i$$

e $z_2 = (a+i)$

[01] Falsa. Se $a \pm \sqrt{2}$, z_1 será um número real.

[02] Verdadeira.

$$z_1\cdot z_2 = \left[3a+(2-a^2)\cdot i\right]\cdot(a+i)$$
$$z_1\cdot z_2 = 3a^2+3ai+(2a-a^3)\cdot i+(2-a^2)\cdot i^2$$
$$z_1\cdot z_2 = \left(4a^2-2\right)+(5a-a^3)\cdot i$$

[04] Falsa, pois $\dfrac{a-1}{a+1} \neq 1.$

[08] Falsa, pois

$$(2i)^{18} = 2^{18}\cdot i^{18} = 2^{18}\cdot i^2 = -2^{18} < 0.$$

[16] Verdadeira, pois $z_2 = i$ e

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 = \frac{2}{4}\cdot(1+2i+i^2) = \frac{1}{2}\cdot 2i = i$$

$$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 = \frac{2}{4}\cdot(1+2i+i^2) = \frac{1}{2}\cdot 2i = i$$

17. [A]

Calculando:

$$(2x+yi)\cdot(y+2xi) = i \to 2xy-2xy+\left(4x^2+y^2\right)i = i$$

$$4x^2+y^2 = 1 \to \text{eq. de uma elipse}$$

18. [B]

O número complexo representado no plano é igual a $z = 1-i$. Assim, tem-se:

$$z^{2015} = (1-i)^{2015} = (1-i)\cdot(1-i)^{2014} = (1-i)\cdot\left((1-i)^2\right)^{1007}$$
$$= (1-i)\cdot(-2i)^{1007} = (1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right)\cdot\left(i^{1007}\right) = (1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right)\cdot\left(i^3\right)$$
$$= (1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right)\cdot(-i) = (-1-i)\cdot\left(-2^{1007}\right) = -1\cdot(1+i)\cdot\left(-2^{1007}\right)$$
$$= 2^{1007}+2^{1007}i$$

19. [E]

i	1	2 + i	2 + i	2 + i	1 + i
-i	1	2 + 2i	3i	i - 1	0
	1	2 + i	i + 1	0	

Interbits®

Podemos então escrever que

$p(z) = (z + i) \cdot (z - i) \cdot (z^2 + (2 + i) \cdot z + i + 1).$

Resolvendo, agora , a equação

$z^2 + (2 + i) \cdot z + i + 1 = 0,$ teremos as outras duas raízes:

$$z = \frac{-(2+i) \pm \sqrt{(2+i)^2 - 4(i+1)}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{-(2+i) \pm \sqrt{-1}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{-(2+i) \pm i}{2 \cdot 1}$$

Portanto, $z = -1$ ou $z = -1 - i.$

As raízes da equação são:

$z_1 = i \Rightarrow |z_1| = 1$

$z_2 = -i \Rightarrow |z_2| = 1$

$z_3 = -1 \Rightarrow |z_3| = 1$

$z_4 = -1 - i \Rightarrow \Rightarrow |z_4| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

Portanto, a opção correta é a [E].

20. 02 + 04 + 08 + 16 = 30.

Sendo $z_2 = z_3 - 4 \cdot z_1,$ temos

$z_2 = 3 + i - 4 \cdot (1 + i) = -1 - 3i.$

[01] Falsa. Calculando o quociente, encontramos

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i}{-1-3i} \cdot \frac{-1+3i}{-1+3i} = \frac{-4+2i}{10} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Portanto, é imediato que $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = -\frac{2}{5} < 0.$

[02] Verdadeira. Seja θ o argumento principal de $(z_1)^2 + (z_2)^2.$ Temos

$$\begin{aligned}(z_1)^2 + (z_2)^2 &= (1+i)^2 + (-1-3i)^2 \\ &= -8 + 8i.\end{aligned}$$

Por conseguinte, sendo a imagem de $(z_1)^2 + (z_2)^2$ um ponto do segundo quadrante e $\operatorname{tg}\theta = \frac{8}{-8} = -1,$ vem $\theta = \frac{3\pi}{4}\text{rad}.$

[04] Verdadeira. De fato, pois

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (1+i) \cdot (-1-3i) \\ &= 2 - 4i \\ &= (2, -4),\end{aligned}$$

ou seja, a imagem de $z_1 \cdot z_2$ pertence ao quarto quadrante.

[08] Verdadeira. Com efeito, pois $z_1 + \overline{z}_2 = 1 + i + (-1 + 3i) = 4i,$ que é um imaginário puro.

[16] Verdadeira. Desde que $z_1^{20} = ((1+i)^2)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} \cdot i^2 = -2^{10}$ e $2^{10}(\cos 5\pi + i \operatorname{sen} 5\pi) = 2^{10}(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) = -2^{10},$ segue o resultado.

ANOTAÇÕES

contato@biologiatotal.com.br
/biologiajubilut
Biologia Total com Prof. Jubilut
@biologiatotaloficial
@Prof_jubilut
biologiajubilut